Τρίτη 6 Οκτωβρίου 2015

Διανυσματικός λογισμός

$\bar{a}$: διάνυσμα

$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\Rightarrow$ $\lambda\bar{a}$: διάνυσμα ίδιας φοράς, $\lambda > 0$

$D \subseteq \mathbb{R}^3$ — $\lambda\bar{a}$: διάνυσμα αντίθετης φοράς, $\lambda < 0$

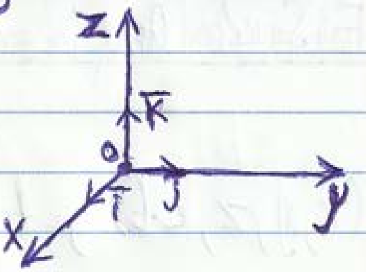
$\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

Αν $\bar{a}, \bar{b}$: διανύσματα, τότε: $\lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b}$: διάνυσμα, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$\exists \bar{0} : \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$

$\forall \bar{a} \; \exists \bar{b} : \bar{a} + \bar{b} = \bar{0} \Longrightarrow \bar{b} = -\bar{a}$

Για τον $\mathbb{R}^3$ χρειαζόμαστε τρία διανύσματα $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, ώστε κάθε διάνυσμα $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$ να γράφεται ως εξής:
$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$: βάση του $\mathbb{R}^3$.



$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$

$\|\bar{a}\| = |\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Εσωτερικό γινόμενο

Έστω $\bar{a}, \bar{b}$: διανύσματα.
Ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο το $\bar{a} \cdot \bar{b} = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos\theta$,
θ: γωνία μεταξύ των $\bar{a}, \bar{b}$.

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \neq 0\end{array}\right| \Rightarrow \bar{a}, \bar{b} : \text{κάθετα}$$

Το εσωτερικό γινόμενο αντιστοιχεί σε **προβολή**.

$\bar{e}_i$: μοναδιαία διανύσματα

Τα διανύσματα βάσης $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^{n}$ ικανοποιούν την εξής σχέση: $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$

Ιδιότητες

(i) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

(ii) $\bar{c} \cdot (\lambda \bar{a} + \kappa \bar{b}) = \lambda \bar{c} \cdot \bar{a} + \kappa \bar{c} \cdot \bar{b}$, $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$

(iii) $\bar{a} = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}$, $\bar{b} = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k} \Longrightarrow$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

(iv) $\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Μη ευκλείδειοι χώροι

Ειδική θεωρία της σχετικότητας: Ορίζουμε τον 4-διάστατο χώρο.

(x, y, z, ct), t: χρόνος, c: ταχύτητα του φωτός

Ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο το εξής:

$\bar{p} \cdot \bar{p}' = ctt' - (xx' + yy' + zz')$

$\bar{p} \cdot \bar{p} = \bar{p}^2 = ct^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$

Το μέτρο ενός $\bar{p} \neq \bar{0}$ μπορεί να είναι μηδέν.

Το μέτρο ενός $\bar{p}$ μπορεί να πάρει και αρνητική τιμή.

Αξιωματική θεμελίωση διανυσματικού χώρου

$$\bar{a} = |a\rangle$$

Κάθε διανυσματικός χώρος S χαρακτηρίζεται από τις εξής ιδιότητες:

(i) Κλειστός ως προς την πρόσθεση

$$|a\rangle \in S,\ |b\rangle \in S \Rightarrow |a\rangle + |b\rangle \in S$$

(ii) Κλειστός ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμό

$$|a\rangle \in S,\ \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda |a\rangle \in S$$

Παράδειγμα: $\bar{a} \in \mathbb{R}^3,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \bar{a} \in \mathbb{R}^3$

(iii) $|0\rangle, |a\rangle \in S \Rightarrow |a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$

(iv) $\forall |a\rangle \in S\ \exists |a'\rangle \in S : |a\rangle + |a'\rangle = |0\rangle$ ή $|a'\rangle = -|a\rangle$

(v) Ιδιότητες πρόσθεσης

α) $|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle$
β) $|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle$

(vi) Ιδιότητες πολλαπλασιασμού με αριθμό

α) $1|a\rangle = |a\rangle$
β) $\lambda(\kappa|a\rangle) = \kappa(\lambda|a\rangle) = (\kappa\lambda)|a\rangle$
γ) $(\kappa+\lambda)|a\rangle = \kappa|a\rangle + \lambda|a\rangle$
δ) $\lambda(|a\rangle+|b\rangle) = \lambda|a\rangle+\lambda|b\rangle$

Με βάση τα παραπάνω μπορεί να δειχθεί ότι:
(i) Το μηδενικό διάνυσμα είναι μονοσήμαντα ορισμένο.
(ii) Το αντίθετο διάνυσμα είναι μονοσήμαντα ορισμένο.
(iii) $0|a\rangle = |0\rangle$ και $\lambda|0\rangle = |0\rangle$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$
(iv) Το αντίθετο του $|a\rangle$ είναι το $-|a\rangle$.

Εσωτερικό γινόμενο

Θα συνδέσουμε έναν αριθμό (πραγματικό ή μιγαδικό) με δύο διανύσματα.

Ορίζουμε το $\langle b|$ (bra) και το $|a\rangle$ (ket), ώστε το εσωτερικό γινόμενο να είναι το $\langle b|a\rangle$ (bracket).

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

(i) $\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle^* \neq \langle a|b\rangle$
Αν $|b\rangle \equiv |a\rangle$, τότε: $\langle a|a\rangle = \langle a|a\rangle^* \in \mathbb{R}$

(ii) Αν $|c\rangle = \lambda|a\rangle + \kappa|b\rangle$, τότε:
$\langle d|c\rangle = \lambda\langle d|a\rangle + \kappa\langle d|b\rangle$

(iii) $\langle a|a\rangle \geq 0$ και $\langle a|a\rangle = 0 \Leftrightarrow |a\rangle = |0\rangle$

(iv) $\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$

(v) Δύο διανύσματα $|a\rangle$ και $|b\rangle$ είναι ορθογώνια αν $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle = 0$.

<u>Παρατήρηση:</u> Γενικά, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ως προς τη σειρά στο εσωτερικό γινόμενο. Αν $\langle a|b\rangle^* = \langle a|b\rangle$, τότε τα εσωτερικά γινόμενα λέγονται συμμετρικά.

<u>Παράδειγμα</u>

Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συγκροτεί διανυσματικό χώρο.

(i) Αν $f(x), g(x)$: συνεχείς, τότε: $f(x) + g(x)$: συνεχής

(ii) Αν f: συνεχής στο $[a,b]$, τότε: $\lambda f(x)$: συνεχής, $\lambda \in \mathbb{R}$

(iii) Το μηδενικό στοιχείο είναι η μηδενική συνάρτηση.

(iv) Αν f: συνεχής στο $[a,b]$, τότε: $\exists\, g(x) = -f(x)$:
$f(x) + g(x) = f(x) + (-f(x)) = 0$

<u>Εσωτερικό γινόμενο:</u> $\langle g|f\rangle = \int_a^b g^*(x) f(x)\,dx = \int_a^b g(x) f(x)\,dx$

(i) $\langle g|f\rangle = \langle f|g\rangle^*$

$$\langle g|f\rangle = \int_a^b g^*(x) f(x)\,dx = \int_a^b (f^* \cdot g)^* dx = \left(\int_a^b f^*(x)\, g(x)\,dx\right)^* =$$
$$= \langle f|g\rangle^*$$

(ii) $|H\rangle = \lambda_1 |f\rangle + \lambda_2 |g\rangle$

$$\langle F|H\rangle = \lambda_1 \langle F|f\rangle + \lambda_2 \langle F|g\rangle$$

$$\langle F|H\rangle = \int_a^b F^*(x) H(x)\,dx = \int_a^b F^*(x)\left(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)\right)dx =$$

$$= \int_a^b \lambda_1 F^*(x) f(x)\,dx + \int_a^b \lambda_2 F^*(x) g(x)\,dx =$$

$$= \lambda_1 \int_a^b F^*(x) f(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b F^*(x) g(x)\,dx =$$

$$= \lambda_1 \langle F|f\rangle + \lambda_2 \langle F|g\rangle$$

Εργαζόμαστε ομοίως και για τις ιδιότητες (iii), (iv), (v) του εσωτερικού γινομένου.

<u>Ανισότητα του Schwarz</u>: Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $|a\rangle, |b\rangle \in S$ ισχύει:

$$\|a\| \cdot \|b\| \geq |\langle b|a\rangle|$$

Γραμμική ανεξαρτησία

<u>Ορισμός</u>: Τα διανύσματα $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ καλούνται γραμμικά ανεξάρτητα αν

$$\lambda_1|x_1\rangle + \lambda_2|x_2\rangle + \dots + \lambda_n|x_n\rangle = |0\rangle \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Σε αντίθετη περίπτωση λέγονται γραμμικά εξαρτημένα και υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \neq 0$.

<u>Παράδειγμα</u>

Τα μοναδιαία διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$

$$\lambda_1 \bar{i} + \lambda_2 \bar{j} + \lambda_3 \bar{k} = \bar{0}$$

$$\lambda_1 \langle \bar{i}|\bar{i}\rangle + \lambda_2 \langle \bar{i}|\bar{j}\rangle + \lambda_3 \langle \bar{i}|\bar{k}\rangle = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

Παράδειγμα

Τα μονώνυμα $1, x, x^2, x^3$

Κάνουμε την αντιστοιχία $|x_1\rangle = 1$, $|x_2\rangle = x$, $|x_3\rangle = x^2$, $|x_4\rangle = x^3$.
Τα x_i, $i=1,\dots,4$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Έστω $a_1|x_1\rangle + a_2|x_2\rangle + a_3|x_3\rangle + a_4|x_4\rangle = |0\rangle$.
Τότε: $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
Τότε, από την Άλγεβρα είναι γνωστό ότι:
$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

Τρίτη 13 Οκτωβρίου 2015

Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος λέγεται N-διάστατος $(N < +\infty)$ αν υπάρχουν N γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, αλλά οποιαδήποτε N+1 διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ορισμός: Αν για κάθε δοσμένο σύστημα διανυσμάτων $\{|x_i\rangle\}_1^N$ μπορούμε να βρούμε ένα ακόμα γραμμικά ανεξάρτητο διάνυσμα για κάθε N, τότε ο χώρος είναι άπειρων διαστάσεων.

Ορισμός: Ένα σύνολο n διανυσμάτων $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^n$ αποτελεί βάση του διανυσματικού χώρου αν κάθε $|x\rangle \in S$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\{|x_i\rangle\}_1^n$.
$|x\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |x_i\rangle$, a_i: συνιστώσες του $|x\rangle$ ως προς τη βάση $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^n$ (μοναδικές)

Παραδείγματα

① $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$: μοναδιαία διανύσματα του $\mathbb{R}^3$
$\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$: βάση του $\mathbb{R}^3$
Διάνυσμα θέσης ενός σημείου P : $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$

② $\{1, x, x^2, x^3\}$: βάση του χώρου των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του 3
$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$: βάση του χώρου των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του n
$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

Θεώρημα: Αν n διανύσματα ενός n-διάστατου διανυσματικού χώρου S είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου.

Παρατήρηση

Η βάση λέγεται ορθοκανονική αν $\langle x_j | x_i \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$

Μέθοδος Gram-Schmidt

Η μέθοδος που κατασκευάζει ένα σύστημα ορθοκανονικών διανυσμάτων $|e_i\rangle$ ξεκινώντας από $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ λέγεται ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt.

Έστω $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{\Lambda}$ διανύσματα για χώρο διάστασης N, $\Lambda \geq N$.

(i) Κατασκευάζουμε τα $\langle x_i|x_j\rangle$, $i,j = 1, \dots, N$.
Αγνοούμε τα διανύσματα $|x_i\rangle$ με $\langle x_i|x_i\rangle = 0$.

(ii) Για το $|x_1\rangle$ κατασκευάζουμε το

$$|e_1\rangle = \frac{|x_1\rangle}{\||x_1\rangle\|} = \frac{|x_1\rangle}{\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}} e^{i\varphi} \overset{\varphi=0}{=} \frac{|x_1\rangle}{\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}}$$

Άρα: $\langle e_1|e_1\rangle = 1$

(iii) $|e_2\rangle = N_2 (|x_2\rangle + b_{21}|e_1\rangle)$

Προσδιορισμός των N_2, b_{21} από τα εσωτερικά γινόμενα

$$\langle e_1|e_2\rangle = 0 \Rightarrow \langle e_1|x_2\rangle + b_{21} = 0 \Rightarrow$$
$$b_{21} = -\langle e_1|x_2\rangle = -\frac{\langle x_1|x_2\rangle}{\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}}$$
$$\langle e_2|e_2\rangle = 1 \Rightarrow |N_2|^2 (\langle x_2|x_2\rangle + b_{21}\langle x_2|e_1\rangle + b_{21}^*\langle e_1|x_2\rangle +$$
$$+ |b_{21}|^2 \cdot 1) = 1 \Rightarrow N_2 = \dots$$

(iv) $|e_3\rangle = N_3 (|x_3\rangle + b_{32}|e_2\rangle + b_{31}|e_1\rangle)$

$b_{3i} = -\langle e_i|x_3\rangle$, $i = 1,2$

$$N_3 = \frac{1}{\sqrt{\langle x_3|x_3\rangle - |b_{32}|^2 - |b_{31}|^2}}$$

Τελικά, για το k+1 ορθογώνιο διάνυσμα έχουμε ότι:

$$|e_{k+1}\rangle = N_{k+1}\left(|x_{k+1}\rangle + \sum_{i=1}^{k} b_{k+1,i}|e_i\rangle\right)$$

$$b_{k+1,i} = -\langle e_i|x_{k+1}\rangle, \quad i=1,\dots,k$$

$$N_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{\langle x_{k+1}|x_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^{k}|b_{k+1,i}|^2}}$$

Παράδειγμα

Να κατασκευάσετε τα πολυώνυμα Legendre $P_n(x)$ στο διάστημα $[-1,1]$. Θεωρήστε τη βάση μονωνύμων $|x_i\rangle = x^{i-1}$, $i=1,2,\dots,N+1$.

$$|x_1\rangle = 1, \ |x_2\rangle = x, \ |x_3\rangle = x^2, \dots$$

$$\langle x_m|x_n\rangle = \int_{-1}^{1} x^{m-1}x^{n-1}dx = \int_{-1}^{1} x^{m+n-2}dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{m+n-1}, & m+n: \text{άρτιος και } m+n \geq 2 \\ 0, & m+n: \text{περιττός} \end{cases}$$

Δεν είναι ορθοκανονικά, αλλά:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \quad (\text{ορισμός})$$

$P_0(x) = |P_0\rangle = x^0 = 1$
$P_1(x) = |P_1\rangle = x$
$P_2(x) = |P_2\rangle = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
$P_3(x) = |P_3\rangle = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$\vdots$

Κλασικά ορθογώνια πολυώνυμα

Διαλέγουμε κατάλληλο διάστημα $[a, b]$, τη συνάρτηση βάρους $w(x)$ και την ποσότητα N_n του ολοκληρώματος.
Τότε: $\int_a^b w(x) [P_n(x)]^n dx = N_n$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε όλα τα κλασικά πολυώνυμα με τη μέθοδο Gram - Schmidt.

Legendre : $\{P_n(x)\}$
Hermite : $\{H_n(x)\}$
Chebyshev : $\{T_n(x)\}, \{U_n(x)\}$
Lagerre : $\{L_n^v(x)\}$

Σχέση Parseval - ανισότητα Bessel

Έστω N-διάστατος διανυσματικός χώρος S.
Έχουμε N ορθοκανονικά διανύσματα $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^N$ που σχηματίζουν βάση του S.
Τότε, κάθε διάνυσμα $|x\rangle \in S$ γράφεται ως εξής:
$|x\rangle = \sum_{i=1}^N a_i |e_i\rangle$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τα a_i.
Μπορούμε να προσδιορίσουμε τα a_i με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου.

$$\langle e_m | x \rangle = \langle e_m | \sum_{i=1}^{N} a_i | e_i \rangle \rangle =$$

$$= \langle e_m | (a_1 | e_1 \rangle + a_2 | e_2 \rangle + \dots + a_N | e_N \rangle) \rangle =$$

$$= a_1 \langle e_m | e_1 \rangle + a_2 \langle e_m | e_2 \rangle + \dots + a_m \langle e_m | e_m \rangle + \dots + a_N \langle e_m | e_N \rangle =$$

$$= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_m \cdot 1 + \dots + a_N \cdot 0 = a_m$$

Άρα: $a_i = \langle e_i | x \rangle, \quad i = 1, \dots, N$

Δηλαδή: $|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i | x \rangle | e_i \rangle$

Ορισμός: Αν το ορθοκανονικό σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ δεν περιέχεται σε άλλο μεγαλύτερο ορθοκανονικό σύστημα, τότε καλείται πλήρες. Σε N-διάστατους χώρους ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα αποτελεί βάση.

$|x\rangle, |y\rangle \in S$, $|x\rangle, |y\rangle$: τυχαία διανύσματα

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i | x \rangle | e_i \rangle$$

$$|y\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i | y \rangle | e_i \rangle$$

$$\langle y|x\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle e_j|y\rangle |e_j\rangle \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle |e_i\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \langle e_j|y\rangle^{*} \langle e_i|x\rangle \langle e_j|e_i\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \langle e_j|y\rangle^{*} \langle e_i|x\rangle \delta_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|y\rangle^{*} \langle e_i|x\rangle \Longrightarrow$$

$$\langle y|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|y\rangle^{*} \langle e_i|x\rangle \quad ✲$$

Η σχέση ✲ ονομάζεται ισότητα Parseval.
Μπορούμε να γράψουμε επίσης ότι:

$$\langle y|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle y|e_i\rangle \langle e_i|x\rangle$$

Για την περίπτωση που $|x\rangle = |y\rangle$, έχουμε:

$$\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} |\langle e_i|x\rangle|^2$$

<u>Παρατήρηση</u>

Αν το ορθοκανονικό σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{n}$, $n<N$, δεν είναι πλήρες, τότε ισχύει η ανισότητα Bessel, δηλαδή:

$$\langle x|x\rangle \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i|x\rangle|^2 .$$

(Η ισότητα ισχύει, όταν το σύστημα είναι πλήρες ($n=N$)).

Παράδειγμα

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $h(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx)$, $m=1,2,\dots$

Να βρεθούν όλα τα δυνατά εσωτερικά γινόμενα στο $[-\pi,\pi]$.

$$\langle f|g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} f^* g\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\,dx=0$$

$$\langle f|h\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} f^* h\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sin(mx)\cos(mx)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2mx)\,dx=0$$

$$\langle g|h\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} g^* h\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx=0$$

$$\langle f|f\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} f^* f\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(mx)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(2mx)}{2}\right)dx=1$$

Σχέση με ανισότητα του Schwarz

Έστω $|x\rangle$, $|y\rangle$: ζεύγος διανυσμάτων.

$$\| |x\rangle \| \cdot \| |y\rangle \| \geq |\langle y|x\rangle| \Rightarrow$$

$$\sqrt{\langle x|x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y|y\rangle} \geq |\langle y|x\rangle|$$

Από την ανισότητα Bessel για $n=1$ έχουμε:

$\langle x,x\rangle \geq |\langle e_1|x\rangle|^2$, $|e_1\rangle$: μοναδιαίο διάνυσμα

$$|e_1\rangle = \frac{|y\rangle}{\sqrt{\langle y|y\rangle}}$$

$$\langle x|x\rangle \geq |\langle e_1|x\rangle|^2 = \frac{|\langle y|x\rangle|^2}{\langle y|y\rangle} \Leftrightarrow$$

$$\langle x|x\rangle \langle y|y\rangle \geq |\langle y|x\rangle|^2$$

Σε πλήρες σύστημα ορθοκανονικών διανυσμάτων $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ ισχύει ότι:

$\langle x|e_i\rangle = 0 \Rightarrow |x\rangle = |0\rangle$, $\forall i=1,\dots,N$

Αφού $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$: πλήρες, ισχύει ότι:

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle |e_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle x|e_i\rangle^* |e_i\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} 0 \cdot |e_i\rangle = |0\rangle$$

Τρίτη 20 Οκτωβρίου 2015

Παρατήρηση

Αν μας δίνεται ένας N-διάστατος διανυσματικός χώρος S εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση $\{|e_i\rangle, i=1,2,\dots,N\}$. Τότε, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Το σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ αποτελεί βάση του S.

(ii) Το σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ είναι πλήρες.

(iii) $\langle e_i|x\rangle = 0, \forall i=1,\dots,N \Rightarrow |x\rangle = |0\rangle$

(iv) $|x\rangle \in S \Rightarrow |x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle |e_i\rangle$, όπου $\langle e_i|x\rangle = x_i$

(v) $|x\rangle, |y\rangle \in S \Rightarrow \langle y|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle y|e_i\rangle\langle e_i|x\rangle$

(vi) $|x\rangle \in S \Rightarrow \langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} |\langle e_i|x\rangle|^2$

Διανυσματικοί χώροι απείρων διαστάσεων

Πολλές από τις έννοιες που συναντήσαμε σε χώρους πεπερασμένων διαστάσεων μπορούν να γενικευτούν σε χώρους απείρων διαστάσεων. Νέες έννοιες στους χώρους απείρων διαστάσεων είναι οι εξής:

(i) σύγκλιση των ακολουθιών διανυσμάτων απείρων στοιχείων

(ii) πληρότητα ενός διανυσματικού χώρου

Γενικές έννοιες

Ο διανυσματικός χώρος H είναι άπειρων διαστάσεων, όταν ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του δεν είναι πεπερασμένος $(N \to +\infty)$.

Παράδειγμα

Ένας διανυσματικός χώρος άπειρων διαστάσεων είναι ο χώρος F των συνεχών συναρτήσεων σε ένα διάστημα $[a,b]=I$.
Στο χώρο F τα διανύσματα $|f\rangle, |g\rangle$ αναπαριστούνται από τις συνεχείς συναρτήσεις $f(x), g(x)$, $x\in[a,b]$.
Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως εξής:
$\langle f|g\rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) g(x)\, dx$, όπου $w(x)$: πραγματική, θετική και συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$ που καλείται συνάρτηση πυκνότητας ή βάρους.
Στο χώρο F ορίζονται ορθοκανονικά διανύσματα $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_k\rangle, \dots$ που αντιστοιχούν στις ορθοκανονικές συναρτήσεις $e_1(x), \dots, e_k(x), \dots$ με την ιδιότητα $\langle e_k|e_m\rangle = \int_a^b e_k^*(x) e_m(x) w(x)\, dx = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k=m \\ 0, & k\neq m \end{cases}$.

Η ανισότητα Cauchy-Schwarz για τον διανυσματικό χώρο F:
$|\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle \langle g|g\rangle \Longrightarrow$

$$\left|\int_a^b w(x) f^*(x) g(x)\, dx\right|^2 \leq \int_a^b w(x)\, |f(x)|^2 dx \cdot \int_a^b w(x)\, |g(x)|^2 dx$$

Η απόσταση ρ μεταξύ δύο διανυσμάτων $|f\rangle, |g\rangle$ ορίζεται ως εξής: $\rho(|f\rangle, |g\rangle) \equiv \sqrt{(\langle f| - \langle g|)(|f\rangle - |g\rangle)}$.

$\rho(|f\rangle, |g\rangle) = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$: απόσταση στο χώρο F

<u>Ορισμός:</u> Λέμε ότι μια ακολουθία διανυσμάτων $|f_n\rangle$ συγκλίνει σε ένα διάνυσμα $|f\rangle$ αν $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(|f_n\rangle, |f\rangle) = 0$. Η σύγκλιση αυτή λέγεται μέση σύγκλιση ή μέση τιμή ή ισχυρή σύγκλιση.

<u>Παρατήρηση</u>

Το όριο $|f_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} |f\rangle$, εφόσον υπάρχει, είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι υπάρχει $|f'\rangle$ τέτοιο, ώστε: $|f_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} |f'\rangle$. Τότε, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι:

$\rho(|f\rangle, |f'\rangle) \leq \rho(|f_n\rangle, |f\rangle) + \rho(|f_n\rangle, |f'\rangle)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(|f_n\rangle, |f\rangle) = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(|f_n\rangle, |f'\rangle) = 0$

Άρα: $\rho(|f\rangle, |f'\rangle) = 0$

Άρα, το όριο είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

$|f_n\rangle \equiv f_n(x)$, $|f\rangle \equiv f(x)$

Για το διανυσματικό χώρο F σύγκλιση στη μέση τιμή:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 w(x)\,dx$$

Ορισμός: Μία ακολουθία διανυσμάτων $|f_n\rangle \in H$, $n=1,2,\ldots$ λέγεται βασική αν η απόσταση μεταξύ των $|f_n\rangle$ και $|f_m\rangle$ γίνεται μηδέν, όταν $n,m \to +\infty$, δηλαδή: $\rho(|f_n\rangle, |f_m\rangle) \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$.

Ορισμός: Ένας χώρος H λέγεται πλήρης αν κάθε βασική ακολουθία διανυσμάτων του H συγκλίνει σε όριο που ανήκει στον H.

Βασικές σχέσεις και πληρότητα

Στο κεφάλαιο αυτό, όταν μιλάμε για χώρους Hilbert H, εννοούμε χώρους απείρων διαστάσεων.

Ανισότητα Bessel

H: διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με ένα σύστημα $\{|e_i\rangle, i=1,2,\ldots\}$ τέτοιο, ώστε: $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$, $i,j=1,2,\ldots$

Η ανισότητα Bessel γράφεται ως εξής:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \langle a|e_i\rangle\langle e_i|a\rangle \leqslant \langle a|a\rangle \quad \text{ή} \quad \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^2 \leqslant \langle a|a\rangle$$

(ισχύει για κάθε ορθοκανονικό σύστημα)

Σχέση Parseval

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \langle a|e_i\rangle \langle e_i|a\rangle = \langle a|a\rangle \text{ ή}$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^2 = \langle a|a\rangle \circledast \text{ (εξίσωση Parseval)}$$

Η ⊛ είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας Bessel και ισχύει, όταν το σύστημα $\{|e_i\rangle\}$ είναι πλήρες.
Η ⊛ αποτελεί γενίκευση του πυθαγόρειου θεωρήματος.

Πληρότητα ορθοκανονικού συστήματος

Ορισμός: Ένας χώρος Hilbert H είναι ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο τέτοιο, ώστε η νόρμα του $\|a\|^2 = \langle a|a\rangle$ να μετατρέπει το χώρο σε πλήρη μετρικό χώρο.

Παράδειγμα

$\mathbb{R}^n$: χώρος Hilbert
F: όχι χώρος Hilbert
Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων F δεν είναι πλήρης.

Ορισμός: Ένα ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων $\{|e_i\rangle, i=1,2,\dots\}$ σε ένα χώρο H αποτελεί βάση του χώρου αν $\langle a|e_i\rangle = 0, i=1,2,\dots \Rightarrow |a\rangle = |0\rangle$.
Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται πλήρες.

Θεώρημα: Ένα ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων $\{|e_i\rangle, i=1,2,\ldots\}$ σε ένα χώρο H αποτελεί βάση στο χώρο αυτό αν και μόνο αν ισχύει η σχέση Parseval για κάθε $|a\rangle \in H$.

<u>Απόδειξη</u>

$\boxed{\Rightarrow}$ Έστω μια ορθοκανονική βάση $\{|e_i\rangle, i=1,2,\ldots\}$ του χώρου H.

Τότε: $\langle b|e_i\rangle = 0,\ i=1,2,\ldots \Rightarrow |b\rangle = |0\rangle$

Έστω $|a\rangle \in H$.

Κατασκευάζουμε το διάνυσμα $|b\rangle = |a\rangle - \sum_{i=1}^{+\infty} a_i|e_i\rangle$, $a_i = \langle e_i|a\rangle$.

Τότε: $\langle b|e_j\rangle = \left(\langle a| - \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* \langle e_i|\right)|e_j\rangle =$

$= \langle a|e_j\rangle - \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* \langle e_i|e_j\rangle =$

$= a_j^* - \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* \delta_{ij} = 0$

Άρα: $|b\rangle = |0\rangle$

Άρα: $|a\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i|e_i\rangle$

Άρα, ισχύει η σχέση Parseval.

$\boxed{\Leftarrow}$ Έστω $\langle a|a\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} |\langle e_i|a\rangle|^2,\ \forall |a\rangle \in H$.

Έστω ότι υπάρχει $|b\rangle \in H$ τέτοιο, ώστε:

$\langle e_i|b\rangle = 0$ για όλα τα $|e_i\rangle$, $i=1,2,\ldots$

Τότε, εφαρμόζοντας τη σχέση Parseval για το $|b\rangle$, έχουμε:

$\langle b|b\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} |\langle e_i|b\rangle|^2 = 0 \Longrightarrow |b\rangle = |0\rangle$

Δηλαδή, το σύστημα $\{|e_i\rangle, i=1,2,\ldots\}$ αποτελεί βάση του H.

Παρατήρηση

Στο διανυσματικό χώρο F γράφουμε:

$$\langle f|f\rangle = \int_a^b w(x)\,|f(x)|^2 dx$$

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i |e_i\rangle$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i e_i(x)$$

$e_i(x)$, $i=1,2,\dots$: ορθοκανονικές συναρτήσεις

$$f_i = \langle e_i|f\rangle = \int_a^b w(x)\, e_i^*(x) f(x)\, dx$$

Ανισότητα Bessel: $\sum_{i=1}^{+\infty} |f_i|^2 \leq \langle f|f\rangle = \int_a^b w(x)|f(x)|^2 dx$

Τρίτη 27 Οκτωβρίου 2015

Πληρότητα διανυσματικού χώρου

N-διάστατος διανυσματικός χώρος που ορίζεται στο $\mathbb{C}$ ή στο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης.

Έστω μια βασική ακολουθία διανυσμάτων $\{|f_n\rangle, n=1,2,\dots\}$.

Αφού ο χώρος είναι N-διάστατος, έχουμε: $\{|e_i\rangle, i=1,2,\dots,N\}$: ορθοκανονική βάση του χώρου και $|f_n\rangle = \sum_{i=1}^{N} f_i^n |e_i\rangle$

Αφού $|f_n\rangle$: βασική ακολουθία, έχουμε: $\rho^2(|f_n\rangle, |f_m\rangle) \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$

$$\rho^2(|f_n\rangle,|f_m\rangle)=(\langle f_n|-\langle f_m|)(|f_n\rangle-|f_m\rangle)=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}|f_i^n-f_i^m|^2\xrightarrow[n,m\to+\infty]{}0$$

Τότε: $|f_i^n-f_i^m|\xrightarrow[n,m\to+\infty]{}0$ για δοσμένο i

Η ακολουθία μιγαδικών αριθμών $\{f_i^n\}$ είναι βασική και κατά συνέπεια συγκλίνει.

$$\lim_{n\to+\infty}f_i^n=f_i$$

Κατασκευάζουμε το διάνυσμα $|f\rangle=\sum_{i=1}^{N}f_i|e_i\rangle$.

Αυτό είναι διάνυσμα του N-διάστατου διανυσματικού χώρου.

$$\rho^2(|f\rangle,|f_n\rangle)=\sum_{i=1}^{N}|f_i-f_i^n|^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Δηλαδή: $\rho^2(|f\rangle,|f_n\rangle)\longrightarrow 0$ ή $|f_n\rangle\xrightarrow[n\to+\infty]{}|f\rangle$
(ισχυρή σύγκλιση)

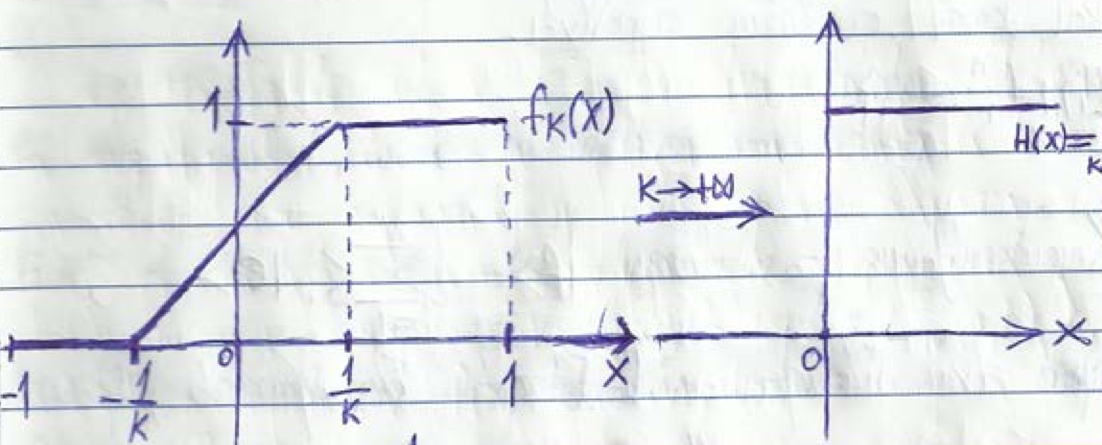
Παρατήρηση

Ανάλογο συμπέρασμα δεν ισχύει για τυχαίο απειροδιάστατο χώρο Hilbert.

Παράδειγμα

Έστω το διάστημα $[-1,1]$, $w(x)=1$ και η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 &, -1 \leq x \leq -\frac{1}{k} \\ \frac{kx+1}{2} &, -\frac{1}{k} < x \leq \frac{1}{k} \\ 1 &, \frac{1}{k} < x \leq 1 \end{cases}.$$



Αποδεικνύεται ότι: $\int_{-1}^{1} |f_k(x) - f_l(x)|^2 dx \xrightarrow[k,l\to+\infty]{} 0$ ή

$$\rho(|f_k\rangle, |f_l\rangle) = 0$$

Δηλαδή, η $|f_k\rangle$ είναι μία ακολουθία διανυσμάτων που συγκλίνει στη μέση τιμή. Το όριο δεν μπορεί να είναι μια συνεχής συνάρτηση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=1$, $x\in[0,1]$.

Τότε: $\lim\limits_{k\to+\infty} \int_0^1 |f(x) - f_k(x)|^2 dx = 0$

Δηλαδή, για $x \in [0,1]$ η $f_k(x)$ συγκλίνει στη μέση τιμή $f(x) = 1$.

Όμοια, μπορούμε να δείξουμε ότι για $x \in [-1,0]$ η $f_k(x)$ συγκλίνει στη μέση τιμή $f(x) = 0$.

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{-1}^{0} |f(x) - f_k(x)|^2 dx = 0$$

Το όριο όμως είναι μονοσήμαντα ορισμένο, άρα δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f(x)$, $x \in [-1,1]$.

Άρα, ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων F δεν είναι πλήρης, άρα ούτε και χώρος Hilbert.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{|e_i\rangle, i=1,2,\ldots\}$ σε έναν πλήρη χώρο H. Τότε, η ακολουθία των διανυσμάτων $|\delta_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\langle e_i|f\rangle)|e_i\rangle$, $|f\rangle \in H$, $\langle f|f\rangle < +\infty$, έχει ως όριο το διάνυσμα $|f\rangle$ και $\lim_{n \to +\infty} \rho(|f\rangle, |\delta_n\rangle) = 0$.

<u>Παρατήρηση</u>

Το προηγούμενο θεώρημα λέει ότι για να μπορούμε να γράφουμε ότι: $f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i e_i(x)$, $f_i = \langle e_i|f\rangle$, πρέπει να πληρούνται οι εξής συνθήκες:

(i) $\{|e_i\rangle, i=1,2,\dots\}$: ορθοκανονική βάση (πλήρες ορθοκανονικό σύστημα)
(ii) H: πλήρης
(iii) $\langle f|f\rangle < +\infty$ ή $\sum_{i=1}^{+\infty} |f_i|^2 < +\infty$
Τότε, οι συντελεστές f_i λέγονται συντελεστές Fourier και ισχύει η σχέση Parseval, δηλαδή: $\langle f|f\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_i|^2$.

Παρατήρηση

Ο συναρτησιακός χώρος F δεν είναι πλήρης. Πρέπει να συμπληρωθεί, ώστε να περιέχει και ασυνεχείς συναρτήσεις που παρουσιάζουν πεπερασμένα άλματα. Ένας τέτοιος χώρος είναι ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (συμβολισμός: $L^2_w(a,b)$), δηλαδή συναρτήσεων $f(x)$ τέτοιων, ώστε:

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,dx < +\infty \quad (*).$$

Θεώρημα (Riesz και Fischer): Ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f(x)$, δηλαδή των συναρτήσεων που ισχύει η $(*)$, είναι πλήρης.

Είδη συγκλίσεων

$\{e_i(x)\}$: ορθοκανονικό σύστημα σε διανυσματικό χώρο

Είναι χρήσιμο να αντικαταστήσουμε την $f(x)$ με ένα πεπερασμένο άθροισμα $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i e_i(x)$, το οποίο πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε στην $f(x)$.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b |f(x)-S_n(x)|^2 w(x)\,dx = 0$$

Αυτό επιτυγχάνεται, όταν οι συντελεστές F_i επιλεγούν, ώστε: $F_i = \langle e_i|f\rangle = \int_a^b e_i^*(x) f(x) w(x)\,dx$.

Ασθενής σύγκλιση

Μια άλλη σύγκλιση που χρησιμοποιείται στους γραμμικούς συναρτησιακούς χώρους είναι η ασθενής σύγκλιση.

Λέμε ότι : $|f_n\rangle \xrightarrow[\text{ασθενώς}]{} |f\rangle$, $|f_n\rangle \in H$, $|f\rangle \in H$ αν $\exists\, |g\rangle \in H : \lim_{n\to+\infty} \langle g|f_n\rangle = \langle g|f\rangle$.

Σύγκλιση σημείο προς σημείο

Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)$ συγκλίνει σημείο προς σημείο στην $f(x)$ αν για δοσμένο $x\in[a,b]$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $N_0(x,\varepsilon)>0$ τέτοιο, ώστε: $n>N_0(x,\varepsilon) : |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

Ομαλή σύγκλιση

Η σύγκλιση $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ είναι ομαλή αν $\forall \varepsilon>0\ \exists N_0(\varepsilon)>0 : n>N_0(\varepsilon) : |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Μπορεί να δειχθεί ότι, αν η σύγκλιση είναι ομαλή, τότε:
(i) Το όριο ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

(ii) Μπορούμε να παραγωγίσουμε μία σειρά όρο προς όρο, δηλαδή: $f(x)=\sum_{i=1}^{+\infty} f_i e_i(x) \Rightarrow$

$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} f_i e_i(x)\right)=\sum_{i=1}^{+\infty} f_i \frac{de_i(x)}{dx}$$

Παρατήρηση

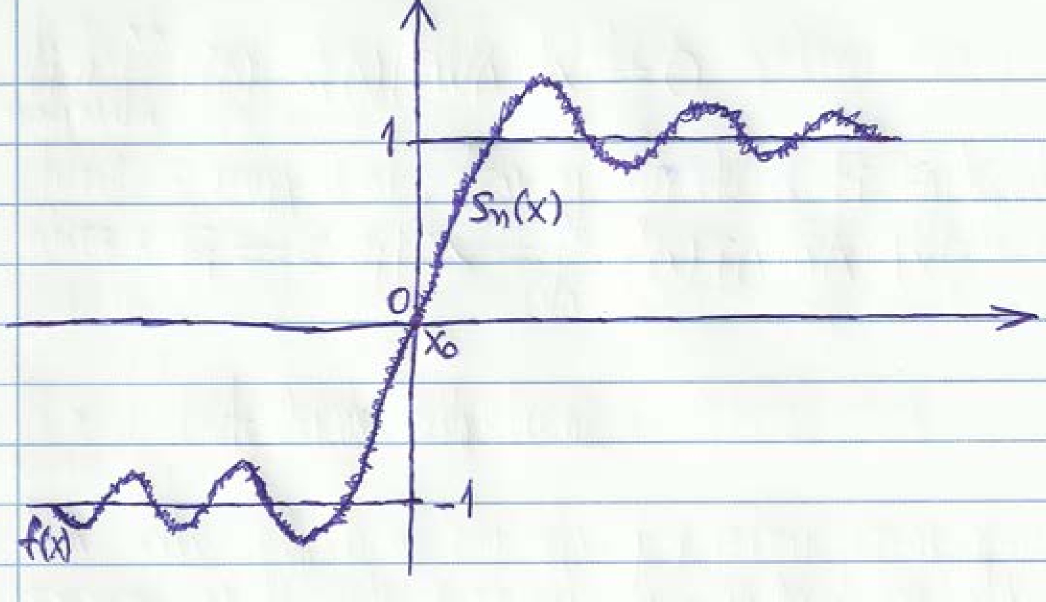
(i) ισχυρή σύγκλιση $\Longrightarrow$ ασθενής σύγκλιση

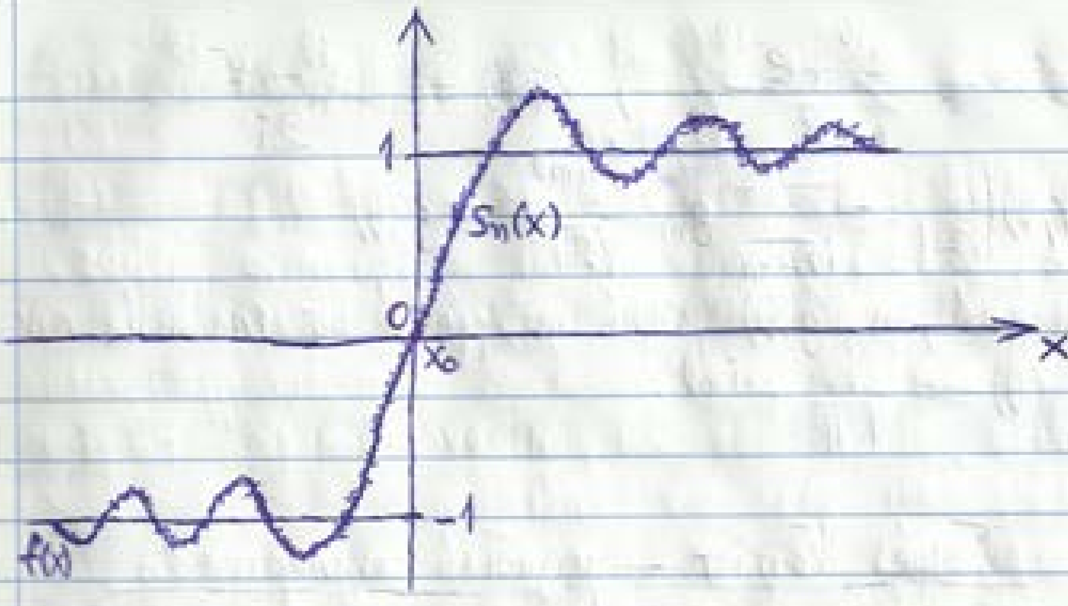
(ii) ασθενής σύγκλιση $\not\Longrightarrow$ ισχυρή σύγκλιση

Φαινόμενο Gibbs

Μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση αναπτύσσεται σε ορθοκανονικές συναρτήσεις, δηλαδή: $\sum_{i=1}^{n} f_i e_i(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, $f_i=\langle e_i|f\rangle$.

Οι $e_i(x)$ είναι ομαλές συναρτήσεις, ενώ η $f(x)$ μπορεί να έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών με πεπερασμένα άλματα. Στα σημεία ασυνέχειας της $f(x)$ η συνάρτηση $S_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i e_i(x)$ δεν μπορεί να προσεγγίσει την $f(x)$ όσο μεγάλος και να είναι ο αριθμός n που είναι πεπερασμένος. Αυτό συμβαίνει, διότι, αν x_0 είναι το σημείο ασυνέχειας της $f(x)$, τότε η $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$ είτε δεν μπορεί να οριστεί ή μπορεί να απειρίζεται, όμως η ποσότητα $\frac{dS_n}{dx}=\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{de_i(x)}{dx}$ παραμένει πάντα υπολογίσιμη και μάλιστα πεπερασμένη. Άρα, όσο μεγάλο και να είναι το πεπερασμένο n, η $\frac{dS_n}{dx}$ δεν μπορεί να προσεγγίσει την κλίση της $f(x)$ στο x_0.


1
0
$S_n(x)$
x_0
-1
$f(x)$



Τρίτη 3 Νοεμβρίου 2015

Σειρές Fourier

Εδώ οι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ορίζονται σε ένα διάστημα της μορφής $[-\pi,\pi]$ κ $[0,2\pi]$.

Τότε, το ορθοκανονικό σύστημα έχει την εξής μορφή:

(i) $e_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, \; m\in\mathbb{Z}, \; i^2=-1$

(ii) $c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; c_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \; s_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx),$

$w(x)=1$

Παράδειγμα

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ μπορεί να υπολογιστεί ομαλά ως εξής:

$$f(x,y)=\sum_{l=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} c_{ln}x^l y^n \xrightarrow[\text{συντεταγμένες}]{\text{πολικές}}$$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\sum_{l=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} c_{ln} r^{l+n}\cos^l\theta \sin^n\theta, \; -\pi<\theta<\pi$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$f(r,\theta)\Big|_{r=1} = \sum_{m=-N}^{N} g_m \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}} = g(\theta)$$

Δηλαδή, η $g(\theta)$ μπορεί να γραφεί ως επαλληλία των $e_m(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta}$.

Σειρές Fourier – μιγαδική αναπαράσταση

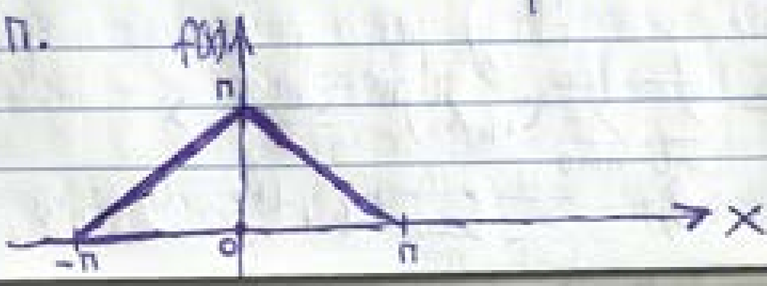
$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m e_m(x), \quad f_m = \int_{-\pi}^{\pi} e_m^*(x) f(x)\, dx \quad (1)$$

Παρατήρηση

Η ανάπτυξη κατά Fourier της (1) παραμένει αναλλοίωτη αν $x \to x+2\pi$, με την προϋπόθεση ότι η $f(x)$ είναι περιοδική $(f(x) = f(x+2\pi))$. Άρα, η (1) ισχύει και στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ αν f: περιοδική.

Παράδειγμα

Να αναπτυχθεί κατά Fourier η συνάρτηση $f(x) = \pi - |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.



f: συνεχής στο $[-\pi, \pi]$

$$f_m = \int_{-\pi}^{0} e_m^{*}(x)(\pi + x)\,dx + \int_{0}^{\pi} e_m^{*}(x)(\pi - x)\,dx \Longrightarrow$$

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\pi\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx}dx + \int_{-\pi}^{0} x e^{-imx}dx - \int_{0}^{\pi} x e^{-imx}dx\right), m \neq 0$$

$$\Longrightarrow f_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{im} x e^{-imx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{m^2} e^{-imx}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{im} x e^{-imx}\Big|_{0}^{\pi} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{m^2} e^{-imx}\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

$$e^{im\pi} = (-1)^m$$

$$\text{Άρα: } f_m = \begin{cases} \dfrac{4}{m^2\sqrt{2\pi}}, & m: \text{περιττός} \\ 0, & m: \text{άρτιος} \end{cases}$$

$$m = 0: f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\pi\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{0} x\,dx - \int_{0}^{\pi} x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(2\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\text{Άρα: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{m=1,3,\ldots}\left(\frac{4}{m^2\sqrt{2\pi}} e^{imx} + \frac{4}{m^2\sqrt{2\pi}} e^{-imx}\right)\right] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m e_m(x) \Longrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\pi^2 + 8\sum_{m=1,3,\ldots} \frac{\cos(mx)}{m^2}\right] \Longrightarrow$$

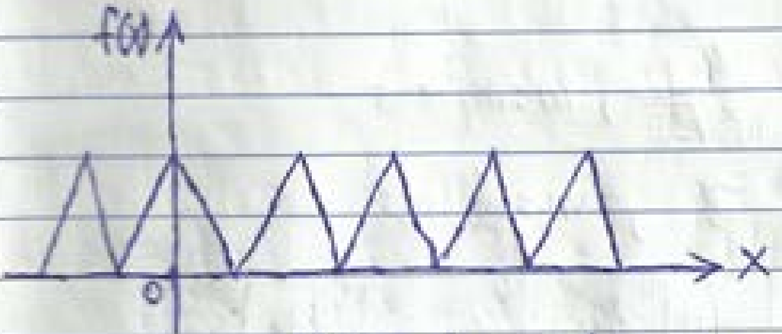
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\pi^2 + 8\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\cos((2l+1)x)}{(2l+1)^2}\right]$$

Η σειρά $\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\cos((2l+1)x)}{(2l+1)^2}$ συγκλίνει ομαλά και το όριό της ταυτίζεται με της $f(x)$ για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$.
Άρα, εδώ δεν παρατηρείται το φαινόμενο Gibbs.

Αν η συνάρτηση επεκταθεί σε όλη την πραγματική ευθεία με περίοδο 2π, η ανάπτυξη κατά Fourier ισχύει και για την επέκταση.

<u>Παρατήρηση</u>

Η πριονωτή συνάρτηση είναι περιοδική και αναπτύσσεται κατά Fourier.



Θεωρία τελεστών

<u>Ορισμός:</u> Ένας τελεστής είναι μια απεικόνιση ενός διανυσματικού χώρου σε έναν άλλο.
Οι τελεστές ορίζονται από τη δράση τους.
Δηλαδή, ο κανόνας με τον οποίο από ένα διάνυσμα $|f\rangle$ «πηγαίνουμε» σε ένα διάνυσμα $|g\rangle$ μέσω του τελεστή A είναι ο εξής:
$|f\rangle \longrightarrow |g\rangle = A|f\rangle$, A: τελεστής.

Παράδειγμα

Έστω ο $\mathbb{R}^3$ με $|x\rangle = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.
Τότε: $|y\rangle = a|x\rangle$, $a \in \mathbb{R}$
Άρα: a: τελεστής (απλούστερη μορφή τελεστή)

Παράδειγμα

Έστω ο συναρτησιακός χώρος F των αναλυτικών συναρτήσεων (συναρτήσεις με παραγώγους κάθε τάξης). Αυτός ο χώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος. Ορίζουμε τον τελεστή της παραγώγισης.

$$|f\rangle \rightarrow |g\rangle = D|f\rangle \text{ ή } g(x) = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$$

Αν $f(x) = x$, τότε: $g(x) = \frac{dx}{dx} = 1$.

Παρατήρηση

Ειδικές περιπτώσεις:
(i) Αν $A|f\rangle = |0\rangle$, $\forall |f\rangle \in S$, τότε ο τελεστής καλείται μηδενικός και γράφουμε ότι: $A = 0$.
(ii) Αν $A|f\rangle = |f\rangle$, $\forall |f\rangle \in S$, τότε ο τελεστής καλείται ταυτοτικός και γράφουμε ότι: $A = I$.

Παρατήρηση

Ο A δεν είναι ο ταυτοτικός τελεστής, όταν δεν ισχύει για κάθε $|f\rangle \in S$ ότι: $A|f\rangle = |f\rangle$.

Παράδειγμα

Έστω ο χώρος των παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
$|f\rangle = f(x)$
Αν $f(x) = e^x$ και $D = \frac{d}{dx}$ (τελεστής), τότε:
$\frac{df(x)}{dx} = D|f\rangle = Df(x) = e^x$ ή $D|f\rangle = |f\rangle$
Όμως, δεν ισχύει για κάθε $|f\rangle$ ότι: $D|f\rangle = |f\rangle$, άρα ο D δεν είναι ο ταυτοτικός τελεστής.

Ιδιότητες τελεστών

(i) Δύο τελεστές A, B είναι ίσοι αν $A|f\rangle = B|f\rangle, \forall |f\rangle \in S$.

(ii) Για τελεστή A και σταθερά $a \in \mathbb{C}$ ορίζουμε $B = Aa$, ώστε: $B|f\rangle = Aa|f\rangle = A(a|f\rangle) = A|f'\rangle$, $|f'\rangle = a|f\rangle$.

(iii) Αν $C = aA$, $a \in \mathbb{C}$, τότε: $C|f\rangle = aA|f\rangle = a|h\rangle$, $|h\rangle = A|f\rangle$.

Παρατήρηση: Η σειρά στις ιδιότητες (ii) και (iii) έχει σημασία.

(iv) Το άθροισμα δύο τελεστών είναι τελεστής και ορίζεται ως εξής: $C = A + B$ με $C|f\rangle = (A+B)|f\rangle = A|f\rangle + B|f\rangle = B|f\rangle + A|f\rangle = (B+A)|f\rangle$.
Άρα: $A + B = B + A$, αφού ισχύει για κάθε $|f\rangle \in S_n$.

(v) Για δύο τελεστές A, B ορίζουμε $C = AB$, ώστε:
$C|f\rangle = AB|f\rangle = A(B|f\rangle) = A|g\rangle$.

Παρατήρηση: Οι πράξεις γίνονται με τη σειρά από δεξιά προς αριστερά. Γενικά, ισχύει ότι: $AB \neq BA$. Άρα, η σειρά έχει σημασία.

Παράδειγμα

$|f\rangle = f(x)$: παραγωγίσιμη, $A = \frac{d}{dx}$, $B = x$

$AB|f\rangle = \frac{d}{dx}(xf(x)) = f(x) + x\frac{df(x)}{dx} = |f\rangle + x\frac{d}{dx}(f(x)) =$
$= |f\rangle + BA|f\rangle$

$BA|f\rangle = x\frac{df(x)}{dx}$

$AB|f\rangle \neq BA|f\rangle$

$AB \neq BA$

Παρατήρηση: Είναι δυνατό να ισχύει ότι: $AB = 0$, έστω και αν $A, B \neq 0$.

(vi) Ένας τελεστής A λέγεται 1-1 αν $A|f\rangle = A|g\rangle \Rightarrow |f\rangle = |g\rangle$, δηλαδή αν η εικόνα (ή δράση) $A|f\rangle$ προσδιορίζει πλήρως το αρχικό διάνυσμα $|f\rangle$.

Παράδειγμα

$|f\rangle = f(x)$

Τελεστής: $D = \frac{d}{dx}$

$D|f\rangle = \frac{df(x)}{dx}$

$D(|f\rangle + a) = \frac{d}{dx}(f(x) + a) = \frac{df(x)}{dx} = D|f\rangle$, $a \in R$

Όμως, γενικά ισχύει ότι: $|f\rangle = f(x) \neq f(x) + a = |g\rangle$

Άρα, η παραγώγιση δεν είναι 1-1 τελεστής.

(vii) Αν ένας τελεστής είναι 1-1, τότε υπάρχει ο αντίστροφός του, συμβολίζεται με A^{-1} και ισχύει ότι: $|g\rangle = A|f\rangle \Leftrightarrow |f\rangle = A^{-1}|g\rangle$.
Τότε: $AA^{-1}|f\rangle = A^{-1}A|f\rangle = |f\rangle = I|f\rangle$ ή $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Παράδειγμα

$$A = \int_0^x dz \,, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Δηλαδή, η δράση του A στο χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι η εξής: $A|f\rangle = \int_0^x f(z)dz$

Θεωρούμε τον τελεστή $B = \frac{d}{dx}$.

$$BA|f\rangle = B(A|f\rangle) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(z)dz\right) = f(x) = |f\rangle$$

$$AB|f\rangle = A(B|f\rangle) = \int_0^x \frac{d}{dz} f(z)dz = f(x) - f(0) =$$
$$= |f\rangle - f(0)$$

Άρα, γενικά ισχύει ότι: $AB \neq BA$, $AB \neq I$

Παρατηρήσεις

1. Ο αντίστροφος τελεστής υπάρχει για τις συναρτήσεις, όταν $f(0) = 0$. Τότε: $B = A^{-1} = \frac{d}{dx}$.

② Για να υπάρχει ο αντίστροφος ενός τελεστή πρέπει να ισχύουν τα εξής:

(i) $\forall |f\rangle \in S \ \exists |h\rangle : |h\rangle = A|f\rangle$

(ii) $A|f\rangle = A|g\rangle \Rightarrow |f\rangle = |g\rangle$ (A: 1-1)

③ Για το παράδειγμα με τον τελεστή της ολοκλήρωσης, αν $g(x) = x+1$ με $g(x) = \int_0^x f(z)\,dz$, τότε δεν υπάρχει $f(x)$ που να ικανοποιεί τη σχέση αυτή, αφού αναγκαστικά έχουμε: $g(0)=0$.

(viii) Για δύο τελεστές που δεν μετατίθενται ορίζουμε τον μεταθέτη των A, B ως εξής: $[A,B] = AB - BA$. Ο μεταθέτης έχει τις εξής ιδιότητες (α) $[A,B] = -[B,A]$, (β) $AB = BA \Leftrightarrow [A,B] = 0$.

<u>Παράδειγμα</u>

$$[A,B]|f\rangle = (AB-BA)|f\rangle = AB|f\rangle - BA|f\rangle =$$

$$= A(B|f\rangle) - B(A|f\rangle) = \frac{d}{dx}(xf(x)) - x\left(\frac{df(x)}{dx}\right) =$$

$$= f(x) + x\frac{df(x)}{dx} - x\frac{df(x)}{dx} = f(x) + xg(x) - xg(x) = f(x) = |f\rangle,$$

όπου $A = \frac{d}{dx}$, $B = x$ $\circledast$

Η $\circledast$ ισχύει για κάθε $|f\rangle \in S$.

Τότε: $[A,B]|f\rangle = |f\rangle, \ \forall |f\rangle \in S \Rightarrow$

$[A,B] = I$, $\left[\frac{d}{dx}, x\right] = I$

Παράδειγμα

S = χώρος πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με N

$x^n \longrightarrow nx^{n-1} + ax^n, \; a \in \mathbb{R}, \; n = 1, 2, \ldots, N$

Να βρεθεί ο τελεστής της παραπάνω απεικόνισης.

$$Ax^n = \left(\frac{d}{dx} + a\right)x^n = nx^{n-1} + ax^n \text{ ή } A = \frac{d}{dx} + a$$

Άσκηση [όμοια με πριν για τις εξής 2 απεικονίσεις]

$x^n \rightarrow nx^n$

$x^n \rightarrow \left(\frac{1}{n} - 1\right)x^n$

Γραμμικοί τελεστές

Ορισμός: Ένας τελεστής A σε ένα διανυσματικό χώρο S λέγεται γραμμικός αν

(i) $A(a|f\rangle) = aA|f\rangle, \; a \in \mathbb{C}$,

(ii) $A(|f\rangle + |g\rangle) = A|f\rangle + A|g\rangle$.

Οι ιδιότητες (i) και (ii) μπορούν να γραφούν ως μία ως εξής:

$A(a|f\rangle + b|g\rangle) = aA|f\rangle + bA|g\rangle, \; a, b \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα

Είναι ο τελεστής $D = \frac{d}{dx}$ γραμμικός;

$|f\rangle = f(x)$, $|g\rangle = g(x)$, $a, b \in R$

$$D(af(x) + bg(x)) = \frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) =$$

$$= \frac{d}{dx}(af(x)) + \frac{d}{dx}(bg(x)) = a\frac{df(x)}{dx} + b\frac{dg(x)}{dx} =$$

$$= aDf(x) + bDg(x) = aD|f\rangle + bD|g\rangle \Rightarrow D: \text{γραμμικός}$$

Παράδειγμα

Ο τελεστής A με $A|f\rangle = Af(x) = f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$ είναι μη γραμμικός τελεστής.

Τρίτη 10 Νοεμβρίου 2015

Παρατήρηση

Οι γραμμικοί τελεστές έχουν τις εξής ιδιότητες:

(i) Αν A, B : γραμμικοί τελεστές, τότε:
$C = A + B$: γραμμικός τελεστής.

Απόδειξη

$$C(a|f\rangle + b|g\rangle) = (A+B)(a|f\rangle + b|g\rangle) =$$
$$= A(a|f\rangle + b|g\rangle) + B(a|f\rangle + b|g\rangle) =$$
$$= aA|f\rangle + bA|g\rangle + aB|f\rangle + bB|g\rangle =$$
$$= (aA|f\rangle + aB|f\rangle) + (bA|g\rangle + bB|g\rangle) =$$
$$= a(A+B)|f\rangle + b(A+B)|g\rangle =$$
$$= aC|f\rangle + bC|g\rangle$$

(ii) Αν A: γραμμικός τελεστής, τότε: aA: γραμμικός τελεστής, όπου $a \in \mathbb{C}$.

(iii) Αν A, B: γραμμικοί τελεστές, τότε: $C = AB$: γραμμικός τελεστής.

<u>Απόδειξη</u>

$$C(a|f\rangle + b|g\rangle) = AB(a|f\rangle + b|g\rangle) = A(aB|f\rangle + bB|g\rangle) =$$
$$= aAB|f\rangle + bAB|g\rangle = aC|f\rangle + bC|g\rangle$$

<u>Παράδειγμα</u>

Για γραμμικούς τελεστές να δειχθεί ότι:

$$[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = 0.$$

$$[[A,B],C] = [AB-BA, C] = (AB-BA)C - C(AB-BA)$$
$$[[B,C],A] = [BC-CB, A] = (BC-CB)A - A(BC-CB)$$
$$[[C,A],B] = [CA-AC, B] = (CA-AC)B - B(CA-AC)$$

Προσαρτημένος τελεστής

Ορισμός: Για έναν τελεστή A σε ένα διανυσματικό χώρο S ορίζεται ο τελεστής A^+, που καλείται προσαρτημένος τελεστής του A, έτσι, ώστε: $\langle A^+g|f\rangle = \langle g|Af\rangle$. Τα $|Af\rangle$ και $\langle A^+g|$ είναι διανύσματα, δηλαδή: $|Af\rangle = A|f\rangle$.

Παρατήρηση

Γνωρίζουμε ότι: $\langle A^+g|f\rangle = \langle f|Ag\rangle^* = \langle f|A|g\rangle^*$

Δηλαδή, ισχύει ότι: $\langle g|A|f\rangle = \langle f|A^+|g\rangle^*$ και $\langle f|A^+|g\rangle = \langle g|A|f\rangle^*$

Επίσης, ισχύει ότι: $(A^+)^+ = A$

$$\langle g|(A^+)^+|f\rangle = \langle f|A^+|g\rangle^* = \langle g|A|f\rangle = \langle g|Af\rangle$$

Ορισμός: Ένας τελεστής A λέγεται αυτοπροσαρτημένος ή ερμιτιανός αν $A^+ = A$. Τότε: $A^+ = A \Leftrightarrow \langle g|Af\rangle = \langle f|A^+|g\rangle^* = \langle A^+g|f\rangle = \langle Ag|f\rangle$.

Ιδιότητες

(i) $(A+B)^+ = A^+ + B^+$

Απόδειξη

$<g|(A+B)^{+}f> = <g|(A+B)^{+}|f> = <(A+B)f|g>^{*} =$
$= <Af|g>^{*} + <Bf|g>^{*} = <g|A^{+}f> + <g|B^{+}f>$

(ii) $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$

Απόδειξη

$<g|(AB)^{+}f> = <ABf|g>^{*} = <A(Bf)|g>^{*} =$
$= <Bf|A^{+}g>^{*} = <f|B^{+}A^{+}g>^{*} = <g|B^{+}A^{+}f>$

(iii) A^{+}: γραμμικός τελεστής

Απόδειξη

$<g|A^{+}(a|f_1> + b|f_2>) = (a<f_1| + b<f_2|)A|g>^{*} =$
$= <af_1|A|g>^{*} + <bf_2|A|g>^{*} =$
$= <g|A^{+}|af_1> + <g|A^{+}|bf_2> =$
$= a<g|A^{+}f_1> + b<g|A^{+}f_2>$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$

(iv) Ο A^{+} είναι μοναδικός.

Απόδειξη

A_1^{+}, A_2^{+}: προσαρτημένοι του A

$B = A_1^+ - A_2^+$

$\langle g | Bf \rangle = \langle g | (A_1^+ - A_2^+) | f \rangle = \langle g | A_1^+ f \rangle - \langle g | A_2^+ f \rangle =$

$= \langle Ag | f \rangle - \langle Ag | f \rangle = 0$

Δηλαδή: $B = 0 \Rightarrow A_1^+ = A_2^+$

$\langle g | A^+ f \rangle = \langle Ag | f \rangle$

<u>Ορισμός</u>: Φραγμένος λέγεται ο τελεστής L, για τον οποίο υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε:

$\|Lf\|^2 = \langle Lf | Lf \rangle < C \langle f | f \rangle = C \|f\|^2.$

<u>Θεώρημα</u>: Για κάθε φραγμένο γραμμικό τελεστή L υπάρχει ο προσαρτημένος L^+.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω S ο χώρος των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$.
Αν $A = \int_0^1 dx$, να δειχθεί ότι: $A^+ = A$.

$$A|f\rangle = A f(x) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$\langle g | f \rangle = \int_0^1 g^*(x) f(x)\,dx \ , \quad w(x) = 1$$

$$\langle g | A^+ f \rangle = \langle f | A | g \rangle^* = \left[\int_0^1 f^*(x) \left(\int_0^1 g(t)\,dt \right) dx \right]^* =$$

$$= \left[\int_0^1 f^*(x)\,dx \cdot \int_0^1 g(t)\,dt \right]^* = \int_0^1 g^*(t)\,dt \cdot \int_0^1 f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 g^*(t) \left(\int_0^1 f(x)\,dx \right) dt = \langle g | Af \rangle$$

Παρατήρηση

Για πραγματικούς διανυσματικούς χώρους ο προσαρτημένος λέγεται ανάστροφος και γράφουμε: $A^{+} = A^{T}$ με $\langle g | Af \rangle = \langle f | A^{T} g \rangle$. Τότε:

(i) A: συμμετρικός αν $A = A^{T}$

(ii) A: αντισυμμετρικός αν $A^{T} = -A$

(iii) A: ορθογώνιος αν $A^{T} = A^{-1}$

Ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις

Ορισμός: Έστω ότι για τον τελεστή $A \neq I$ υπάρχει διάνυσμα $|f\rangle$ τέτοιο, ώστε: $A|f\rangle = \lambda |f\rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε, το διάνυσμα $|f\rangle$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα ή ιδιοσυνάρτηση του A και το λ λέγεται ιδιοτιμή του A.

Παρατήρηση

Αν $A = I$, τότε κάθε διάνυσμα είναι ιδιοδιάνυσμα του εαυτού του με ιδιοτιμή $\lambda = 1$.

Παράδειγμα

Έστω $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ στο χώρο των συναρτήσεων που έχουν όλες τις παραγώγους για $x \in [0, L]$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του τελεστή A αν $u(0) = u(L) = 0$.

Θέλουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα:

$$\left.\begin{cases} A|u\rangle = \lambda |u\rangle \Rightarrow -\dfrac{d^2}{dx^2}u(x) = \lambda u(x) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}\right\} \text{πρόβλημα συνοριακών τιμών}$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{d^2u(x)}{dx^2} + \lambda u(x) = 0 \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0 \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

$u''(x) + \lambda u(x) = 0$: Σ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης, πρώτου βαθμού, γραμμική, ομογενής, με σταθερούς συντελεστές

Ζητάμε λύση της μορφής $u(x) = e^{\rho x}$: $\rho^2 e^{\rho x} + \lambda e^{\rho x} = 0 \Rightarrow$
$e^{\rho x}(\rho^2 + \lambda) = 0 \Rightarrow \rho^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \rho^2 = -\lambda \Rightarrow$
$\rho = \pm\sqrt{\lambda}\, i$

$\lambda > 0$: $u(x) = c_1 e^{+\sqrt{\lambda} i x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} i x} =$

$= A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$\lambda = 0$: $\rho^2 = 0 \Rightarrow \rho = 0$ (διπλή ρίζα) $\Rightarrow$
$u(x) = Be^0 + xAe^0 = Ax + B$

$\lambda > 0$: $u(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, $u(L) = A\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow$
$\sqrt{\lambda}L = \kappa\pi$, $\kappa = 0, 1, \ldots \Rightarrow \lambda = \dfrac{\kappa^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow$
$u(x) = A\sin\left(\dfrac{\kappa\pi x}{L}\right)$

Για να προσδιορίσουμε το A, θεωρούμε ότι: $\langle n|n\rangle = 1 \Rightarrow$

$$|A|^2 \int_0^L \sin^2\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx = 1 \Rightarrow |A|^2 = \frac{2}{L}.$$

Άρα: $\lambda > 0$: $u(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, $k = 0, 1, \ldots$

$\lambda = 0$: $u(x) = Ax + B$

$u(0) = 0 \Rightarrow A \cdot 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0$

$u(L) = 0 \Rightarrow AL + B = 0 \Rightarrow AL + 0 = 0 \xRightarrow{L \neq 0} A = 0$

$u(x) = 0$ (τετριμμένη λύση)

$\lambda < 0$: $u(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$u(0) = A + B = 0$

$u(L) = Ae^{\sqrt{-\lambda}L} + Be^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0$

Άρα: $A = B = 0$

Δηλαδή, για $\lambda < 0$, η μόνη λύση είναι η μηδενική.

Τρίτη 24 Νοεμβρίου 2015

<u>Παράδειγμα</u>

Στο χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο (a,b) να βρεθεί ο προσαρτημένος του $L = k\frac{d}{dx}$, $k \in \mathbb{C}$.

Γνωρίζουμε ότι: $\langle f|g\rangle = \int_a^b f^*(x) g(x)\, dx$

Τότε: $\langle g|L^+ f\rangle = \langle f|Lg\rangle^* = \left[\int_a^b f^*(x) k \frac{dg(x)}{dx} dx\right]^* =$

$$= \int_a^b (f^*(x))^* k^* \frac{d}{dx} g^*(x)\, dx = \int_a^b f(x) k^* \frac{dg^*(x)}{dx} dx =$$

$$= K^* f(x) g^*(x)\Big|_a^b - \int_a^b K^* g^*(x) \frac{df(x)}{dx} dx =$$

$$= K^* f(x) g^*(x)\Big|_a^b + \int_a^b g^*(x)\left(-K^* \frac{df(x)}{dx}\right) dx$$

Άρα: $L^+ = -K^* \frac{d}{dx}$ υπό την προϋπόθεση ότι: $K^* f(x) g^*(x)\Big|_a^b = 0 \Rightarrow$

$K^* f(b) g^*(b) = K^* f(a) g^*(a)$

<u>Παρατήρηση</u>

Η συνθήκη $f(b) g^*(b) = f(a) g^*(a)$ λέγεται προσαρτημένη συνοριακή συνθήκη. Γενικά, μπορεί να υπάρχουν παραπάνω από μία τέτοιες συνθήκες.

<u>Άσκηση</u>

Να βρεθεί ο προσαρτημένος του $L = K \frac{d}{dx}$, $K = K(x) \in \mathbb{R}$ στο χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο (a,b).

<u>Παραδείγματα τελεστών</u>

(i) A: ερμιτιανός αν $A = A^+$ (συμβολίζονται με H)
(ii) A: αντιερμιτιανός αν $A = -A^+$
(iii) A: μοναδιακός αν $A^+ = A^{-1}$ (συμβολίζονται με U)
(iv) A: κανονικός αν $AA^+ = A^+A$
(v) A: προβολικός αν A: αυτοπροσαρτημένος και $A^2 = A$ (συμβολίζονται με P)

Παρατήρηση

$$\langle Ug|Uf\rangle = \langle g|U^+U|f\rangle = \langle g|U^{-1}U|f\rangle = \langle g|f\rangle$$

Άρα, οι μοναδιακοί τελεστές διατηρούν τα μήκη των διανυσμάτων και λέγονται και ισομετρικοί τελεστές.

Παρατήρηση

Οι ερμιτιανοί, αντιερμιτιανοί και μοναδιακοί τελεστές είναι κανονικοί.

Θεώρημα: Αν A: κανονικός τελεστής και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε:
$$A|f\rangle = \lambda|f\rangle \Rightarrow A^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle.$$
Δηλαδή, ο A^+ έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον A, αλλά συζυγείς ιδιοτιμές.

Απόδειξη

Ορίζουμε τον τελεστή $C = A - \lambda I$.
Τότε: $C^+ = A^+ - \lambda^* I$
Ο τελεστής C είναι κανονικός, όταν ο A είναι κανονικός.

$$CC^+|f\rangle = (A-\lambda I)(A^+-\lambda^* I)|f\rangle = (A-\lambda I)(A^+|f\rangle - \lambda^*|f\rangle) =$$
$$= AA^+|f\rangle - \lambda^* A|f\rangle - \lambda A^+|f\rangle + |\lambda|^2|f\rangle \quad (1)$$
$$C^+C|f\rangle = (A^+-\lambda^* I)(A-\lambda I)|f\rangle = (A^+-\lambda^* I)(A|f\rangle - \lambda|f\rangle) =$$
$$= A^+A|f\rangle - \lambda A^+|f\rangle - \lambda^* A|f\rangle + |\lambda|^2|f\rangle \quad (2)$$
$$(1),(2) \Rightarrow CC^+ = C^+C$$

$C|f\rangle = 0$, διότι: $C|f\rangle = (A-\lambda I)|f\rangle = A|f\rangle - \lambda|f\rangle = 0$

$C|f\rangle = 0 \Rightarrow \langle Cf|Cf\rangle = 0 \Rightarrow$

$\langle f|C^+C|f\rangle = 0 \Rightarrow \langle f|CC^+|f\rangle = 0 \Rightarrow$

$\langle C^+f|C^+f\rangle = 0 \Rightarrow C^+|f\rangle = 0 \Rightarrow$

$(A^+ - \lambda^* I)|f\rangle = 0 \Rightarrow A^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle$

<u>Παρατηρήσεις</u>

① Αν H: ερμητιανός τελεστής, τότε οι ιδιοτιμές του H είναι πραγματικές.

<u>Απόδειξη</u>

H: ερμητιανός $\Rightarrow$ H: κανονικός

$H|f\rangle = \lambda|f\rangle$

$H^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle$

$H = H^+ \Rightarrow H|f\rangle = \lambda|f\rangle = H^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle \Rightarrow$

$\lambda = \lambda^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$

② Αν H: αντιερμητιανός τελεστής, τότε οι ιδιοτιμές του H είναι φανταστικές.

③ Αν U: μοναδιακός τελεστής, τότε οι ιδιοτιμές του U έχουν μέτρο τη μονάδα.

<u>Απόδειξη</u>

$U|f\rangle = \lambda|f\rangle$

$U^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle \Rightarrow \lambda U^+|f\rangle = |\lambda|^2|f\rangle \Rightarrow$

$U^+\lambda|f\rangle = |\lambda|^2|f\rangle \Rightarrow U^+U|f\rangle = |\lambda|^2|f\rangle \Rightarrow$

$|f\rangle = |\lambda|^2|f\rangle \Rightarrow |\lambda|^2 = 1$

<u>Θεώρημα</u>: Τα ιδιοδιανύσματα ενός κανονικού τελεστή που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

<u>Απόδειξη</u>

A: κανονικός τελεστής $\Rightarrow AA^+ = A^+A$

λ_1, λ_2: ιδιοτιμές του A με $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$

$\begin{cases} A|f_1\rangle = \lambda_1|f_1\rangle \\ A|f_2\rangle = \lambda_2|f_2\rangle \end{cases}$

$A|f\rangle = \lambda|f\rangle \Rightarrow A^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle$

Πρέπει να δειχθεί ότι: $\langle f_1|f_2\rangle = 0$

$\langle f_2|Af_1\rangle = \lambda_1\langle f_2|f_1\rangle$

$\langle f_1|Af_2\rangle = \lambda_2\langle f_1|f_2\rangle$ ①

$\langle f_1|Af_2\rangle = \langle f_2|A^+f_1\rangle^* = \langle f_2|\lambda_1^* f_1\rangle^* =$

$= \lambda_1\langle f_2|f_1\rangle^* = \lambda_1\langle f_1|f_2\rangle$ ②

①, ② $\Rightarrow \lambda_2\langle f_1|f_2\rangle = \lambda_1\langle f_1|f_2\rangle \xrightarrow{\lambda_1\neq\lambda_2} \langle f_1|f_2\rangle = 0$

<u>Παράδειγμα</u>

Να εξετάσετε αν ο τελεστής $A = \int_0^x dt$ είναι αυτοπροσαρτημένος.

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)dx$$

$$\langle g|A^{+}f\rangle = \langle Ag|f\rangle = \int_a^b \left(\int_0^x g(t)dt\right)^* f(x)\,dx \Longrightarrow$$

$$\langle g|A^{+}f\rangle = \int_a^b G^*(x)f(x)dx = \left(\int_a^b G(x)f^*(x)dx\right)^*, \text{ όπου}$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt$$

$$\int_a^b G(x)f^*(x)dx = G(x)F^*(x)\Big|_a^b - \int_a^b G'(x)F^*(x)dx =$$

$$= G(b)F^*(b) - G(a)F^*(a) - \int_a^b g(x)F^*(x)dx =$$

$$= G(b)F^*(b) - G(a)F^*(a) - \int_a^b g(x)\left(\int_0^x f(t)dt\right)^* dx =$$

$$= G(b)F^*(b) - G(a)F^*(a) + \int_a^b g(x)\left(-Af^*(x)\right)dx, \text{ όπου}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Αν $G(b)F^*(b) = G(a)F^*(a)$, τότε: $A^{+} = -\int_0^x dt$

Απόλυτα συνεχείς τελεστές

Ορισμός: Έστω ένας γραμμικός διανυσματικός χώρος S εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο. Ένας τελεστής που δρα στο χώρο S λέγεται πλήρως ή απόλυτα συνεχής αν μετασχηματίζει μια φραγμένη ακολουθία διανυσμάτων σε μια ακολουθία που περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω ένας τελεστής A που δρα σε ένα χώρο Hilbert. Έστω A: αυτοπροσαρτημένος και πλήρως συνεχής. Τότε:

(i) Οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές.

(ii) Υπάρχει τουλάχιστον μία μη μηδενική ιδιοτιμή.

(iii) Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μία μη μηδενική ιδιοτιμή είναι πεπερασμένα σε πλήθος και, αν είναι παραπάνω από ένα, τότε λέγονται εκφυλισμένα.

(iv) Τα ιδιοδιανύσματα του A αποτελούν βάση του χώρου Hilbert.

Θεώρημα: Έστω ένας τελεστής A που δρα σε ένα χώρο Hilbert. Έστω A: αυτοπροσαρτημένος και πλήρως συνεχής. Τότε:

(i) Οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές.

(ii) Υπάρχει τουλάχιστον μία μη μηδενική ιδιοτιμή.

(iii) Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μία μη μηδενική ιδιοτιμή είναι πεπερασμένα σε πλήθος και, αν είναι παραπάνω από ένα, τότε λέγονται εκφυλισμένα.

(iv) Τα ιδιοδιανύσματα του A αποτελούν βάση του χώρου Hilbert.

Τρίτη 1 Δεκεμβρίου 2015

Συστήματα Sturm-Liouville

$\langle f|g\rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) g(x)\, dx$, όπου $w(x)$: συνάρτηση βάρους

Θεωρούμε τις Δ.Ε. της μορφής $Lu = \lambda u$ με

$L = a(x)\dfrac{d^2}{dx^2} + \beta(x)\dfrac{d}{dx} + \gamma(x)$: πραγματικός τελεστής.

Ζητάμε να υπολογίσουμε τον προσαρτημένο τελεστή του L.

$$\langle g|Lf\rangle = \int_a^b w(x) g^*(x) Lf(x)\, dx = \int_a^b w(x) g^*(x)\left(a(x)\frac{d^2f}{dx^2} + \beta(x)\frac{df}{dx} + \gamma(x)f\right)dx =$$

$$= \int_a^b w(x) g^*(x) a(x)\frac{d^2f}{dx^2}\, dx + \int_a^b w(x) g^*(x) \beta(x)\frac{df}{dx}\, dx + \int_a^b w(x) g^*(x)\gamma(x) f\, dx$$

Θέτουμε $w_1 = w(x) g^*(x) a(x)$ και $w_2 = w(x) g^*(x)\beta(x)$.

$$\int_a^b w_1 f'' dx = w_1 f'\Big|_a^b - \int_a^b w_1' f' dx =$$

$$= w_1 f'\Big|_a^b - w_1' f\Big|_a^b + \int_a^b w_1'' f dx$$

$$\int_a^b w_2 f' dx = w_2 f\Big|_a^b - \int_a^b w_2' f dx$$

$$\langle g|Lf\rangle = Q(f,g)\Big|_a^b + \int_a^b (wag^{*''}f - w\beta f g^{*'} + w\gamma g^* f)dx +$$

$$+ \int_a^b [(wa)''g^* + 2(wa)'g^{*'} - (w\beta)'g^*] f dx =$$

$$= Q(f,g)\Big|_a^b + \int_a^b (wafg^{*''} + w\beta f g^{*'} + w\gamma g^* f)dx +$$

$$+ \int_a^b [(wa)''g^* + 2(wa)'g^{*'} - (w\beta)'g^* - 2(w\beta)g^{*'}] f dx =$$

$$= Q(f,g)\Big|_a^b + \int_a^b wLg^* f dx + \int_a^b [(wa)'' - (w\beta)'] g^* f dx +$$

$$+ \int_a^b 2[(wa)' - w\beta] g^{*'} f dx$$

$w_1'' = [(wa)g^*]'' = (wa)''g^* + 2(wa)'g^{*'} + wag^{*''}$

$w_2' = [(w\beta)g^*]' = (w\beta)'g^* + (w\beta)g^{*'}$

$Q(f,g)\Big|_a^b = w_1 f'\Big|_a^b + (w_2 - w_1')f\Big|_a^b$ (συνοριακές συνθήκες)

$\langle g|Lf\rangle = \langle Lg|f\rangle$ (δηλαδή: L: αυτοπροσαρτημένος) στην

περίπτωση που $Q(f,g)\Big|_a^b = 0$ και $(wa)' - w\beta = 0 \Longrightarrow$

$\frac{1}{w} \cdot \frac{d(wa)}{dx} = \beta$.

Τότε: $w'a + wa' = w\beta \Rightarrow aw' + (a' - \beta)w = 0$ και

$Q(f,g)\Big|_a^b = wa[f^*g' - ff^{*'}]_a^b = 0$

$L=\frac{1}{w}\left(\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}+\gamma(x)w(x)\right)$, $p(x)=a(x)w(x)$

Ξεκινάμε από το $Lu=\lambda u$ και χρησιμοποιούμε $w(x)$ τέτοια, ώστε: $aw'+(a'-\beta)w=0 \Rightarrow \frac{w'}{w}=\frac{\beta-a'}{a} \Rightarrow$

$$\frac{w'}{w}=\frac{\beta}{a}-\frac{a'}{a} \Rightarrow \ln w=\int\frac{\beta}{a}dx-\ln a \Rightarrow$$

$$w(x)=\left|\frac{c}{a(x)}\right|e^{\int\frac{\beta(x)}{a(x)}dx},\ w(x)>0.$$

Ορίζουμε το σύστημα $Lu=\lambda wu$ με $L=\frac{d}{dx}\left(wa\frac{d}{dx}\right)+\gamma(x)w(x)$

και συνοριακές συνθήκες $wa\left[f^{*}g'-ff^{*\prime}\right]_a^b=0$, όπου L: αυτοπροσαρτημένος και $\lambda\in\mathbb{R}$.

Το σύστημα της παραπάνω μορφής καλείται σύστημα Sturm - Liouville.

Παραδείγματα

① Πολυώνυμα Legendre

$a(x)=1-x^2$, $\beta(x)=2x$, $\gamma(x)=l(l+1)$, $l\in\mathbb{N}$

Περιοριζόμαστε στο $[a,b]=[-1,1]$.

$$w(x)=\frac{1}{1-x^2}e^{-\int\frac{2x}{1-x^2}dx}=1$$

Δηλαδή, η Δ.Ε. που δίνει τα πολυώνυμα Legendre είναι η εξής: $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0$, $l\in\mathbb{N}$

② Πολυώνυμα Laguerre

$a(x)=x$, $\beta(x)=\nu+1-x$, $\gamma(x)=\gamma_0$, ν,γ_0: σταθερές,

$0<x<+\infty$, $w(x)=x^{\nu}e^{-x}$

Δηλαδή, η Δ.Ε. που δίνει τα πολυώνυμα Laguerre είναι η εξής: $xy''+(\nu+1-x)y'+\gamma_0 y=0$

③ Πολυώνυμα Hermite

$a(x)=1$, $b(x)=-2x$, $\gamma(x)=2\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $w(x)=e^{-x^2}$

Δηλαδή, η Δ.Ε. που δίνει τα πολυώνυμα Hermite είναι η εξής: $y''-2xy'+2\lambda y=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Γενίκευση του προβλήματος Sturm-Liouville

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y+\lambda w(x)y=0 \Longrightarrow$$

$$\left(p(x)\frac{d^2}{dx^2}+p'(x)\frac{d}{dx}+q(x)\right)y+\lambda w(x)y=0$$

Συνοριακές συνθήκες: $\left.\begin{cases} a_1 y(a)+a_2 p(a)y'(a)=0 \\ b_1 y(b)+b_2 p(b)y'(b)=0\end{cases}\right\}$, όπου

$a_1^2+a_2^2\neq 0$, $b_1^2+b_2^2\neq 0$

Πιθανές συνοριακές συνθήκες:

(i) Συνθήκες Dirichlet (για την y)

(ii) Συνθήκες Neumann (για την y')

(iii) Συνθήκες Robin (μικτού τύπου: $ay+by'$)

Το πρόβλημα Sturm-Liouville καλείται

(α) κανονικό αν $p,w>0$ στο $[a,b]$,

(β) ιδιάζον αν $p>0$, $w\geq 0$, $p(a)=p(b)=0$,

(γ) περιοδικό αν $p,w>0$, $p(a)=p(b)$, $y(a)=y(b)$, $y'(a)=y'(b)$.

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε δεύτερης τάξης γραμμικός τελεστής μπορεί να γραφεί στη μορφή του τελεστή του προβλήματος Sturm-Liouville.

Απόδειξη

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=a_2(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)$.
Έστω συνάρτηση $w(x)$ τέτοια, ώστε:

$$w(x)a_2y''+w(x)a_1y'+w(x)a_0y=w(x)f(x)\Longleftrightarrow$$

$$wy''+w\frac{a_1}{a_2}y'+w\frac{a_0}{a_2}y=\frac{w}{a_2}f.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $w(x)$ έτσι, ώστε:

$$wy''+w\frac{a_1}{a_2}y'=(wy')'=w'y'+wy'' \text{ ή } w\frac{a_1}{a_2}=w'.$$

Τότε, το αρχικό πρόβλημα γράφεται ως εξής:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=F(x), \text{ όπου } p(x)=e^{\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx},$$

$$q(x)=p(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)}, \quad F(x)=p(x)\frac{f(x)}{a_2(x)}.$$

Ιδιότητες

(i) Αν υπάρχουν ιδιοτιμές, τότε είναι πραγματικές.

Απόδειξη

Έστω $\lambda\in\mathbb{C}$.
Τότε: $\begin{cases} L[y]+\lambda wy=0 \\ L[\bar{y}]+\bar{\lambda}w\bar{y}=0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} L[y]\bar{y}+\lambda w|y|^2=0 \\ L[\bar{y}]y+\bar{\lambda}w|y|^2=0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$[p(y'\bar{y}-\bar{y}'y)]'+(\lambda-\bar{\lambda})w|y|^2=0\Rightarrow$$

$$[p(y'\bar{y}-\bar{y}'y)]_a^b+(\lambda-\bar{\lambda})\int_a^b w(x)\,|y|^2dx=0$$

$$[p(y'\bar{y}-\bar{y}'y)]_a^b=Q(y,\bar{y})\Big|_a^b$$

Άρα: $Q(y,\bar{y})\Big|_a^b=0$

$$(\lambda-\bar{\lambda})\int_a^b w(x)|y|^2dx=0 \xRightarrow{\int_a^b w(x)|y|^2dx\neq 0}$$

$$\lambda-\bar{\lambda}=0\Rightarrow\lambda=\bar{\lambda}\Rightarrow$$

$\lambda\in\mathbb{R}$

(ii) Οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους $w(x)$.

Απόδειξη

Έστω u,v: ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις τιμές λ,μ του συνόλου ιδιοτιμών.

$$[p(u'v-v'u)]_a^b=-(\lambda-\mu)\int_a^b wuv\,dx$$

$$\lambda\neq\mu\Rightarrow\int_a^b wuv\,dx=0$$

(iii) Οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες ως προς μια συνάρτηση βάρους $w(x)$. Δηλαδή, ορίζοντας το εσωτερικό γινόμενο $\langle f|g\rangle = \int_a^b w f^* g\,dx$, οι ιδιοσυναρτήσεις φ_n

ικανοποιούν την εξής σχέση: $\langle \varphi_n|\varphi_m\rangle = \langle \varphi_n|\varphi_m\rangle \delta_{nm}$

(iv) Το σύνολο των ιδιοτιμών είναι πλήρες. Δηλαδή, κάθε $f(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n(x), \quad c_n = \frac{\langle f|\varphi_n\rangle}{\langle \varphi_n|\varphi_n\rangle} = \frac{\langle f|\varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Τρίτη 8 Δεκεμβρίου 2015

Συνάρτηση γάμμα

Ορισμός: $\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{z\cdot(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)} n^z$, $z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$

Παρατήρηση

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)\cdot(z+n+1)} n^{z+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{z\cdot(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)} n^z \frac{z}{z+n+1} n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{z\cdot(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{z\cdot n}{z+n+1} \Rightarrow$$

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n\cdot(n+1)} n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n!}\cdot\frac{n}{n+1} = 1$$

$$\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(3) = 2\cdot\Gamma(2) = 2$$
$$\Gamma(4) = 3\cdot\Gamma(3) = 6$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Δηλαδή, για z: θετικός, ακέραιος, έχουμε:
$$\Gamma(n+1) = n!$$

Ο δεύτερος ορισμός της συνάρτησης γάμμα δίνεται μέσω του εξής ολοκληρώματος:
$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \ , \ Re(z) > 0$$

(i) $t = x^2 \Longrightarrow$
$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2z-2} 2x\, dx =$$
$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2z-1} dx \quad (1)$$

(ii) $t = -\ln x \Longrightarrow$
$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_1^{0} e^{\ln x} (-\ln x)^{z-1} \left(-\frac{1}{x}\right) dx =$$
$$= \int_0^{1} x(-\ln x)^{z-1} \frac{1}{x} dx = \int_0^1 (-\ln x)^{z-1} dx =$$
$$= \int_0^1 (0 - \ln x)^{z-1} dx = \int_0^1 (\ln 1 - \ln x)^{z-1} dx =$$
$$= \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1} dx \quad (2)$$

Οι ορισμοί ① και ② είναι ισοδύναμοι.

Ιδιότητες

(i) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Απόδειξη

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Θέτουμε $x = \sqrt{t}$.

$t = x^2$, $dt = 2x dx$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} 2x dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Θέτουμε $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

$$I^2 = I \cdot I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r \, dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}(2r dr) \overset{R=r^2}{=} \frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty} e^{-R} dR = \frac{\pi}{4}\left[-e^{-R}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

Άρα: $I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Άρα: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \Longrightarrow$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(ii) Για $z=-n$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό τύπο $\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}$ και να έχουμε:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}\,,$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\,,\quad \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}\,,\ \text{κ.ο.κ.}$$

Συνάρτηση Βήτα

Ορισμός: Ορίζουμε ως συνάρτηση $B(m,n)$ το ολοκλήρωμα

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx.$$

Παρατηρήσεις

① Το $B(m,n)$ συγκλίνει για $m,n>0$.

② Μπορεί να δειχθεί ότι: $B(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2m-1}(\cos\theta)^{2n-1}\,d\theta$

Παρατήρηση

Συσχέτιση της συνάρτησης βήτα με την γάμμα:

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\,,\quad m,n>0$$

Απόδειξη

$$\Gamma(m)=2\int_0^{+\infty}x^{2m-1}e^{-x^2}\,dx$$

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)=4\int_0^{+\infty}x^{2m-1}e^{-x^2}\,dx\cdot\int_0^{+\infty}y^{2n-1}e^{-y^2}\,dy=$$

$$=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx$$

Κάνουμε αλλαγή συντεταγμένων σε πολικές συντεταγμένες.

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}(r\cos\theta)^{2m-1}(r\sin\theta)^{2n-1}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=$$

$$=2\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2n-1}(\cos\theta)^{2m-1}d\theta\cdot\int_0^{+\infty}r^{2(m+n)-1}e^{-r^2}dr=$$

$$=B(m,n)\cdot 2\int_0^{+\infty}r^{2(m+n)-1}e^{-r^2}dr=B(m,n)\cdot\Gamma(m+n)\Longrightarrow$$

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Σειρές Fourier

$$\left.\begin{cases} y''=-\lambda y \\ y(0)=y(L)=0 \end{cases}\right\}\text{ πρόβλημα συνοριακών τιμών}$$

$$L=-\frac{d^2}{dx^2}$$

Η λύση είναι η εξής: $y_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n=1,2,\dots$,

δηλαδή κάθε συνάρτηση $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ με $c_n=\frac{\langle y_n|f\rangle}{\|y_n\|^2}$.

$$\left\{\begin{array}{l} y'' = -\lambda y \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{array}\right\}$$ πρόβλημα συνοριακών τιμών

Οι λύσεις της Δ.Ε. είναι οι εξής: $y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 0, 1, \dots$,

δηλαδή κάθε συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

με $c_0 = \frac{\langle y_0 | f \rangle}{\|y_0\|^2}$, $c_n = \frac{\langle y_n | f \rangle}{\|y_n\|^2}$.

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) \\ y'(0) = y'(L) \end{cases}$$

Θέτουμε $\lambda = k^2$ έτσι, ώστε οι λύσεις να είναι της μορφής $y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$ με τις εξής συνοριακές συνθήκες: $y(0) = c_1 = c_1 \cos kL + c_2 \sin kL = y(L)$,
$y'(0) = c_2 k = -c_1 k \sin kL + c_2 k \cos kL = y'(L) \Longrightarrow$
$c_2 = -c_1 \sin kL + c_2 \cos kL$.

$$\begin{cases} (\cos kL - 1)\, c_1 + \sin kL\, c_2 = 0 \\ -\sin kL\, c_1 + (\cos kL - 1)\, c_2 = 0 \end{cases}$$

Για να έχουμε μη μηδενική λύση, πρέπει να ισχύει:

$$\begin{vmatrix} \cos kL - 1 & \sin kL \\ -\sin kL & \cos kL - 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\cos kL - 1)^2 + \sin^2 kL = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos^2 kL - 2\cos kL + 1 + \sin^2 kL = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos kL = 1 \Rightarrow kL = 2n\pi \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{2n\pi}{L}$$

$$\lambda = k^2 = \frac{4n^2\pi^2}{L^2}$$

Υπάρχουν για την ίδια ιδιοτιμή οι εξής δύο ιδιοσυναρτήσεις:

$$y_n^{(1)}(x) = \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right),\ y_n^{(2)}(x) = \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right).$$

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται εκφυλισμός.

$$\langle y_n^{(1)} | y_n^{(2)} \rangle = \int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = 0$$

Άρα, οι δύο ιδιοσυναρτήσεις $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ είναι ορθογώνιες.

Άρα: $f(x) = a_0 y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n y_n^{(1)}(x) + b_n y_n^{(2)}(x)\right) =$

$$= a_0 y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right) \text{ με}$$

$$a_0 = \frac{\langle y_0 | f \rangle}{\|y_0\|^2},\ a_n = \frac{\langle y_n^{(1)} | f \rangle}{\|y_n^{(1)}\|^2},\ b_n = \frac{\langle y_n^{(2)} | f \rangle}{\|y_n^{(2)}\|^2}$$

Εφαρμογές στη σύγχρονη Φυσική

Η μαθηματική θεμελίωση της σύγχρονης Φυσικής και ιδιαίτερα της Κβαντικής Φυσικής βασίζεται στην εξίσωση Schrödinger, που είναι η εξής:

$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$, όπου H=διαφορικός τελεστής,

$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\bar{r})$, $\bar{r} = (x,y,z)$, m: μάζα σωματιδίου,

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}\ Kg\ m/s^2$, ħ: σταθερά Planck.

$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) + V(x,y)$: μερική διαφορική εξίσωση (Μ.Δ.Ε.) πρώτης τάξης ως προς t, δεύτερης τάξης ως προς x, y

Η λύση της Δ.Ε. Schrödinger $\psi(\bar{r},t)$ ονομάζεται κυματοσυνάρτηση και προσδιορίζει την πιθανότητα (ανά μονάδα όγκου) να βρεθεί το σωματίδιο m στη «γειτονιά» του σημείου $\bar{r}$ τη χρονική στιγμή t.

$$P(\bar{r},t) = |\psi(\bar{r},t)|^2$$

$$\int_V P(\bar{r},t)\,dV = \int_V |\psi(\bar{r},t)|^2\,dV = 1$$

Τρίτη 15 Δεκεμβρίου 2015

Αντιστοιχία Κβαντικής Μηχανικής με Κλασική Μηχανική

Κλασική Μηχανική	Κβαντική Μηχανική
Υλικό σημείο μάζας m	Σωματίδιο μάζας m
Τροχιά του υλικού σημείου: $\bar{r}=\bar{r}(t)$	Κυματοσυνάρτηση: $\psi(\bar{r},t)$
Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα:	Εξίσωση Schrödinger:
$m\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\bar{F}(\bar{r})=-\bar{\nabla}V(\bar{r})$	$i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\bar{\nabla}^2\psi+V(\bar{r})\psi$

Είδη Μ.Δ.Ε.:
(i) Ελλειπτικού τύπου (προβλήματα σταθερής κατάστασης)
(ii) Παραβολικού τύπου (προβλήματα εξέλιξης φαινομένου)
(iii) Υπερβολικού τύπου

$\bar{\nabla}^2\psi=0$ (εξίσωση Laplace): ελλειπτικού τύπου

$\bar{\nabla}^2\psi=q(\bar{r})$ (εξίσωση Poisson): ελλειπτικού τύπου

$\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=D\bar{\nabla}^2\psi$ (εξίσωση διάχυσης): παραβολικού τύπου

$\psi_{tt}=c\bar{\nabla}^2\psi$ (κυματική εξίσωση): υπερβολικού τύπου με

αρχική συνθήκη $u_{tt}=u_{xx}$ και αναλυτική λύση
$u(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct)$

Στις Μ.Δ.Ε. ελλειπτικού τύπου χρειάζονται συνοριακές συνθήκες, ενώ στις Μ.Δ.Ε. παραβολικού τύπου χρειάζονται συνοριακές συνθήκες και αρχική συνθήκη.

Η εξίσωση Schrödinger είναι παραβολικού τύπου Μ.Δ.Ε., άρα χρειάζονται συνοριακές συνθήκες και αρχική συνθήκη.

Αρχική συνθήκη: $\psi(\bar{r},0) = \psi_0(\bar{r})$

Συνοριακές συνθήκες: $\lim_{\bar{r}\to\pm\infty} \psi(\bar{r},t)$: πεπερασμένο

Συνήθως, λόγω φυσικών απαιτήσεων, έχουμε: $\lim_{\bar{r}\to\pm\infty} \psi(\bar{r},t) = 0$

Θα λύσουμε τη Μ.Δ.Ε. Schrödinger με χωρισμό μεταβλητών.

$\psi(\bar{r},t) = \phi(\bar{r})\,T(t)$ με $i\hbar\phi\dot{T} = (H\phi)T \Leftrightarrow$

$$i\hbar\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{H\phi(\bar{r})}{\phi(\bar{r})} = E$$

$$\begin{cases} i\hbar\dot{T} = ET \quad (1) \\ H\phi = E\phi \quad (2) \end{cases}$$

Η σταθερά E του χωρισμού παριστάνει την ενέργεια του σωματιδίου.

$(1) \Rightarrow T(t) = e^{-\frac{E}{i\hbar}t}$

$(2) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\bar{\nabla}^2\phi + V(\bar{r})\phi = E\phi$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi(x) = E\phi(x)$$

Η (2) είναι μία τυπική εξίσωση ιδιοτιμών με ιδιοτιμή την ενέργεια του σωματιδίου (E).

Το πρόβλημα πλέον είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm-Liouville, άρα οι λύσεις της ② αποτελούν ένα πλήρες σύστημα.

$$② \Rightarrow \nabla^2\phi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(\vec{r}))\phi = 0 \Rightarrow$$

$\nabla^2\phi + (\varepsilon - u(\vec{r}))\phi = 0$, όπου

$$\varepsilon = \frac{2m}{\hbar^2}E, \quad u(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{r}) \quad ③$$

Έστω το πρόβλημα σε μία διάσταση, δηλαδή:

$\phi'' + (\varepsilon - u(x))\phi = 0.$

Θεωρούμε $u(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ +\infty, & x < 0, x > L \end{cases}$.

Ουσιαστικά, έχουμε εγκλωβίσει το σωματίδιο στην περιοχή $(0, L)$.

$$\left.\begin{cases} \phi'' + \varepsilon\phi = 0 \\ \phi(0) = \phi(L) = 0 \end{cases}\right\}$$ πρόβλημα συνοριακών τιμών

Λύση της Δ.Ε.: $\phi(x) = A\sin(\sqrt{\varepsilon}x) + B\cos(\sqrt{\varepsilon}x)$

$\phi(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$

$\sin(\sqrt{\varepsilon}L) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$

Άρα: $\phi_n = c\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Δηλαδή, ένα κβαντικό σωματίδιο μέσα σε ένα μοναδιάστατο χωρίο δυναμικού μπορεί να υπάρξει μόνο, όταν η ενέργειά του παίρνει μια διακριτή ακολουθία τιμών.

Προσδιορίζουμε τη σταθερά c ως εξής:

$$\int_0^L |\varphi_n|^2 dx = 1 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Άρα: $\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Αν έχουμε ταλαντώσεις, δηλαδή αν έχουμε ένα ελατήριο, τότε: $F = -kx \Rightarrow F = -\frac{dr}{dx} = -kx \Rightarrow r = \frac{1}{2}kx^2$

Θεωρούμε την απλή περίπτωση, όπου $\hbar = m = k = 1$.

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi'' + (2E - x^2)\varphi = 0 \\ \varphi(\pm\infty) = 0 \end{array}\right\} \text{πρόβλημα συνοριακών τιμών}$$

Η απαίτηση $\varphi(\pm\infty) = 0$ εκφράζει την απαίτησή μας να περιγράψουμε σωματίδια που δε μπορούν να διαφύγουν στο άπειρο και άρα η πιθανότητα να βρεθούν εκεί είναι μηδέν.

Για μηδενικές ιδιοτιμές, έχουμε: $E = 0 \Rightarrow$

$\varphi_\infty''(x) - x^2 \varphi_\infty(x) = 0$ (4)

Οι λύσεις της (4) εκφράζουν τη συνάρτηση φ στην περιοχή του απείρου.

$$\Phi_{\infty}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \quad \circledast$$

Η $\circledast$ ισχύει, όταν $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Θεωρούμε λύσεις της αρχικής συνάρτησης της εξής μορφής:

$\Phi(x) = \Phi_{\infty}(x)\, H(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H(x)$, όπου

$H'' - 2x H' + (2E-1) H = 0.$

Θεωρώντας $E = E_n = n + \frac{1}{2}$, έχουμε:

$H'' - 2x H' + 2n H = 0$ (αντιστοιχεί στα πολυώνυμα Hermite)

$$\varphi_{\infty}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \circledast$$

Η $\circledast$ ισχύει, όταν $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Θεωρούμε λύσεις της αρχικής συνάρτησης της εξής μορφής:
$\varphi(x) = \varphi_{\infty}(x) H(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H(x)$, όπου
$H'' - 2x H' + (2E-1) H = 0$.

Θεωρώντας $E \Rightarrow E_n = n + \frac{1}{2}$, έχουμε:

$H'' - 2xH' + 2nH = 0$ (η λύση της είναι τα πολυώνυμα Hermite)

Τρίτη 12 Ιανουαρίου 2016

<u>Θεώρημα:</u> Αν μια κυματοσυνάρτηση ψ ικανοποιεί την εξίσωση ιδιοτιμών $A\psi = a\psi$ ενός κβαντομηχανικού τελεστή A με ιδιοτιμή a, τότε η αβεβαιότητα ΔA του μεγέθους A μηδενίζεται.

<u>Ορισμός:</u> Ως αβεβαιότητα (συμβολισμός: ΔA) ορίζουμε την τυπική απόκλιση $\sigma^2 = (\Delta A)^2$.

Αρχή της αβεβαιότητας

Το γινόμενο της αβεβαιότητας θέσης και ορμής δε μπορεί να είναι μικρότερο από το ήμισυ της σταθεράς Planck ($\hbar$), δηλαδή: $(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2}$.

Φυσική σημασία: Η ταυτόχρονη ακριβής γνώση της θέσης και της ορμής (ταχύτητας) ενός κβαντομηχανικού σωματιδίου είναι αδύνατη.

Συναρτήσεις Bessel

Δ.Ε. Bessel: $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$ (1)

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Frobenius, έχουμε:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+\beta}$$

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\beta) x^{k+\beta-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\beta)(k+\beta-1) x^{k+\beta-2}$$

$$x^2 y = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+\beta+2} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k-2} x^{k+\beta}$$

$$(1) \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\beta)(k+\beta-1) x^{k+\beta} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\beta) x^{k+\beta} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k-2} x^{k+\beta} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (-n^2) x^{k+\beta} = 0$$

Αντικατάσταση: $\sum_{k=0}^{+\infty}\left\{c_k\left[(k+\beta)(k+\beta-1)+(k+\beta)-n^2\right]+c_{k-2}\right\}x^{k+\beta}=0$

$c_k\left[(k+\beta)(k+\beta-1)+(k+\beta)-n^2\right]+c_{k-2}=0 \Leftrightarrow$

$c_k\left[(k+\beta)(k+\beta-1+1)-n^2\right]+c_{k-2}=0 \Leftrightarrow$

$c_k\left[(k+\beta)^2-n^2\right]+c_{k-2}=0$ (αναδρομική σχέση για τα c_k)

Οι αρνητικοί δείκτες μηδενίζονται.

$c_{-2}=c_{-1}=0$

$k=0$: $c_0(\beta^2-n^2)=0 \Rightarrow \beta^2=n^2 \Rightarrow \beta=\pm n$

$k=1$: $c_1\left[(1+\beta)^2-n^2\right]=0 \Rightarrow c_1=0$

(i) $\beta=n$

$c_1=0$

$c_2=-\dfrac{c_0}{4(n+1)}$

$c_3=0$

$c_4=-\dfrac{c_2}{4(2n+4)}=\dfrac{c_0}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)}$

Άρα: $y(x)=c_0x^n+c_2x^{n+2}+c_3x^{n+3}+c_4x^{n+4}+\dots$ (2)

(ii) $\beta=-n$

$y(x)=cx^n\left[1-\dfrac{x^2}{2(2n+2)}+\dfrac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)}-\dots\right]$ (3)

Παρατηρήσεις

(1) Η συνολική λύση της εξίσωσης Bessel είναι ο γραμμικός συνδυασμός των δύο λύσεων.
Συνολική λύση: $y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$, όπου
$J_n(x)$: συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης n,
$Y_n(x)$: συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους τάξης n

(2) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση γάμμα, μπορούμε να γράψουμε το εξής: $J_n(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}}{r!\,\Gamma(n+r+1)}$

<u>Γεννήτρια συνάρτηση</u>

Η συνάρτηση $e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, t^n$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της συνάρτησης Bessel πρώτου είδους.
Δηλαδή, οι συναρτήσεις Bessel $J_n(x)$ μπορούν να οριστούν ως συντελεστές του t^n στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ σε σειρά.

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = e^{\frac{xt}{2} - \frac{x}{2t}} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^l}{l!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{x}{2t}\right)^m}{m!} =$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^l t^l \left(\frac{x}{2}\right)^m t^{-m}}{l!\, m!} =$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{l+m} t^{l-m}}{l!\, m!} \quad \underline{n = l-m}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} t^n}{(n+m)!\, m!} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{(n+m)!\, m!} t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, t^n$$

Αναδρομικοί τύποι

(i) $J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$

(ii) $J_n'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right)$

(iii) $x J_n'(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x)$

(iv) $\left(x^n J_n(x)\right)' = x^n J_{n-1}(x)$

(v) $\left(x^{-n} J_n(x)\right)' = -x^{-n} J_{n+1}(x)$

Αναλυτική συνέχιση

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

Συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους τάξης n:

$$Y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{J_n(x)\cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}, & n \notin \mathbb{Z} \\ \lim\limits_{p \to n} \dfrac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι: $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$.

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\frac{1}{2}}}{r!\,\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\frac{1}{2}}}{r!\,\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{1!\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{9}{2}}}{2!\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}-\dots=$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{9}{2}}}{2!\,\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}-\dots=$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots\right)=$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}=$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\cdot\frac{\sin x}{x}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

<u>Άσκηση</u> [ομοίως]

Να δειχθεί ότι: $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$.

Τρίτη 19 Ιανουαρίου 2016

Πολυώνυμα Legendre

Δ.Ε.: $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Frobenius, έχουμε:

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+\theta}$$

$$\theta = 0: y = c_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \dots\right] +$$

$$+ c_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \dots\right]$$

Βρήκαμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Γενική λύση της Δ.Ε. Legendre:

$y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$, όπου

$P_n(x)$: πολυώνυμο Legendre βαθμού n,

$Q_n(x)$: συνάρτηση Legendre δευτέρου είδους

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right]$$

<u>Ιδιότητες</u>

① Τύπος του Rodrigues: $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

② Γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\, t^n$$

③ Αναδρομικοί τύποι των πολυωνύμων Legendre:

(i) $P_{n+1}(x) = \dfrac{2n+1}{n+1}\, x P_n(x) + \dfrac{-n}{n-1} P_{n-1}(x)$

(ii) $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+2)\, P_n(x)$

<u>Παράδειγμα</u>

Να δειχθεί ότι: $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0$, $m \neq n$.

Αν $m = n$, τότε να δειχθεί ότι: $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}$

$$\left.\begin{array}{l}(1-x^2)\,P_m''(x) - 2x\,P_m'(x) + m(m+1)\,P_m(x) = 0 \\ (1-x^2)\,P_n''(x) - 2x\,P_n'(x) + n(n+1)\,P_n(x) = 0\end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}(1-x^2)\,P_m''(x)\,P_n(x) - 2x\,P_m'(x)\,P_n(x) + m(m+1)\,P_m(x)\,P_n(x) = 0 \\ (1-x^2)\,P_n''(x)\,P_m(x) - 2x\,P_n'(x)\,P_m(x) + n(n+1)\,P_n(x)\,P_m(x) = 0\end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$(1-x^2)\big(P_m''(x)P_n(x) - P_n''(x)P_m(x)\big) - 2x\big(P_m'(x)P_n(x) - P_n'(x)P_m(x)\big) =$$
$$= [n(n+1) - m(m+1)]\,P_m(x)\,P_n(x) \Longleftrightarrow$$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}\big(P_m'(x)P_n(x) - P_n'(x)P_m(x)\big) + \frac{d}{dx}(1-x^2)\big(P_m'(x)P_n(x) - P_n'(x)P_m(x)\big) =$$
$$= [n(n+1) - m(m+1)]\,P_m(x)\,P_n(x) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\big(P_m'(x)P_n(x) - P_n'(x)P_m(x)\big)\Big) =$$
$$= [n(n+1) - m(m+1)]\,P_m(x)\,P_n(x)$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n$$

$$\frac{1}{1-2tx+t^2}=\sum_{m=0}^{+\infty}P_m(x)t^m\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n=$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}P_m(x)P_n(x)t^{n+m}$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1-2xt+t^2}dx=-\frac{1}{2t}\left[\ln(1-2xt+t^2)\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx\,t^{n+m}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx\,t^{2n}$$

$$\ln(1-t)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(1+t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(1+t)-\ln(1-t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}=$$

$$=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

Δηλαδή: $\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n}$

Άρα: $\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}$

Πολυώνυμα Hermite

Δ.Ε.: $y'' - 2xy' + 2ny = 0 \,,\ n = 0,1,\dots$ ⊛

Ως πολυώνυμα Hermite ορίζουμε τις λύσεις της εξίσωσης ⊛.

Τα πολυώνυμα Hermite δίνονται από τον εξής τύπο:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$ (τύπος του Rodrigues)

$H_0(x) = 1$
$H_1(x) = 2x$
$H_2(x) = 4x^2 - 2$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$

Ιδιότητες

① Γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Hermite:

$$e^{2tx - t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

② Αναδρομικοί τύποι των πολυωνύμων Hermite:

(i) $H_{n+1}(x) = 2x\,H_n(x) - 2n\,H_{n-1}(x)$
(ii) $H_n'(x) = 2n\,H_{n-1}(x)$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.

$$e^{2tx-t^2} = e^{x^2-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

Από τον ορισμό της σειράς Taylor, έχουμε:

$$f(t) = e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \text{ (στη «γειτονιά» του } t=0\text{)}$$

$$\text{Άρα: } H_n(x) = \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{2tx-t^2}\right)\Big|_{t=0} = \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{x^2-(t-x)^2}\right) =$$

$$= e^{x^2}\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(t-x)^2} = e^{x^2}\frac{\partial^n}{\partial(-x)^n} e^{-(t-x)^2}\Big|_{t=0} =$$

$$= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Παρατήρηση

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x-t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x-t)$$